

이러한 방향에 따른 장의 강도에 대한 보정항을 애초의 벡터 퍼텐셜 표현에 적용하면.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r \left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

이고 이것이 한 입자를 원천으로 하는 벡터 퍼텐셜에 대한 지체된 퍼텐셜, 리에나르-비헤르트 퍼텐셜이다. 이 관계가 스칼라 퍼텐셜에도 마찬가지로 적용되어야 하므로 지체된 스칼라 퍼텐셜에 대한 식은

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r \left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

이다. 이로써 리에나르와 비헤르트가 처음 유도했던 운동하는 원천에 기인한 지체된 퍼텐셜에 대한 유도를 해 보았고, 이제 이를 기반으로 애초에 다루려고 했던 운동하는 원천에 기인한 지체된 장을 다룰 차례이다.

5.4 파인만의 공식

처음의 출발점이었던 파인만의 공식으로 다시 돌아가 보자.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e'_r}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{e'_r}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} e'_r \right]$$

이 식은 얼핏 단순해 보이지만 들여다보면 생각보다 알아보기가 쉽지 않다는 사실을 알게 된다. 시간에 대해 한번 미분 하는 항은 단일 항이 아닌 두 항이 나뉘셈으로 결합된 항이고, 그 다음으로는 시간에 대해 두 번 미분 하는 항이 등장하고 있다. 해석해 보려 하면 숨겨져 있던 여러 항들이 튀어나오게 되는 식이다. 얼핏 이 수식은 실용적인 목적으로 바로 사용할 수 있는 형태가 아닌 어떤 원리를 나타내기 위한 미분 방정식의 꼴을 가진 수식으로 보인다.

파인만 이전의 수식들의 경우는 아예 적분 방정식의 꼴을 가진 것들이는데, 나는 그런 것들은 해답으로서의 수식이 아닌 그것을 쓴 사람의 연구 계획으로서의 표기일 뿐 별 가치가 없다고 본다. 미분 방정식 꼴의 경우에는 해결이 안된 경우에도 종종 유용한 물리적인 의미를 가질 경우가 있으나 역시 해가 없이는 불확실함이 대부분이다. 그리고 보면 미분 방정식의 구체적 해결 방법은 어떤 함수에 대한 적분을 구하는 것일 경우가 많기도 하다. 결국 물리학에서 미분이나 적분 방정식의 경우 그 의미가 확실해지는 것은 물리 방정식 뿐만 아니라 그 해까지 명확하게 제시된 경우이다.

그러나, 이 수식의 특이한 점은 아무리 보아도 어떤 특별한 물리적 원리를 묘사하려고 한 것으로도 보이지 않는다는 점이다. 전자기 복사에서 전자기 복사의 방향성 그림으로 묘사하였던 내용을 조금 뒷받침하는 설명이 가능해진다 정도 말고는, 어떤 특별한 원리에 대한 설명 같은 것도 없다. 그저 평범한 전자기 법칙에서 유도된 결과라고 파인만이 보았다는 의미이다. 파인만이 이 수식의 유도에 관해 짐작할 수 있을 만한 언급을 한 것은 "What is the formula for the electric and magnetic field produced by one individual charge? It turns out that this is very complicated, and it takes a great deal of study and sophistication to appreciate it." 이 구절 뿐인데 나는 처음 이 구절을 읽고 다른 사람이 유도한 것을 파인만이 대단히 칭찬한 것으로 착각하고 원 유도자를 찾았을 정도로, 파인만 본인이 이 수식의 최초 유도자였으니 만큼, 자화자찬을 한, 상당히 자부심을 드러내는 표현이다. 결과적으로 그래도 될만한 파인만의 큰 업적이라고 본다.

이후 이 공식은 다른 꼴로 현대의 대학에서 주로 교재로 사용되는 그리피스 전기자기학 책에서 다시 등장 하는데, 그것은 이후에 다시 다룰 것이다. 파인만 이전 전자기학의 표준 교재의 위치에 있었던 1950년대 출판된 퍼셀의 책에서는 해당 공식이 등장하지 않는다. 파인만이 처음 이 공식을 유도하는데 성공한 것이 1950년 경이라는 소문은 있다.

하지만 공식의 정확한 의미는 알 수 없어도 얼핏 보기에 내가 고심하던 라플라스 문제에 대한 단서가 보이는 것 같아, 나는 이 공식이 뭔가 의미가 있는 것으로 보고 파보기로 하였다.

우선 단위 벡터의 미분이라는 낯선 표현부터 없애보기로 한다. 단위 벡터의 정의는 $e'_r = \frac{\vec{r}'}{r'}$ 로서 서로 표현을 바꾸어 쓸 수 있다. 이를 적용해서 분해하여 써보면,

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e'_r}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{e'_r}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} e'_r \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}'}{r'^3} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}'}{r'^3} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\vec{r}'}{r'} \right) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}'}{r'^3} - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{r'^2} \vec{v}' + 3\vec{r}' \frac{\dot{r}'}{r'^3} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}'}{r'} + \frac{\vec{r}' \dot{r}'}{r'^2} \right) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}'}{r'^3} - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{r'^2} \vec{v}' + 3\vec{r}' \frac{\dot{r}'}{r'^3} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{a}'}{r'} - \vec{v}' \frac{\dot{r}'}{r'^2} - \vec{v}' \frac{\dot{r}'}{r'^2} + \dot{r}' \frac{\vec{v}'}{r'^2} - 2 \frac{\vec{r}' \dot{r}'^2}{r'^3} \right) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{3}{c} \frac{\dot{r}'}{r'^3} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{r}'}{r'^2} + \frac{2}{c^2} \frac{\dot{r}'^2}{r'^3} \right) \vec{r}' - \frac{1}{c^2} \left(\frac{c}{r'^2} - 2 \frac{\dot{r}'}{r'^2} \right) \vec{v}' - \frac{1}{c^2} \frac{\vec{a}'}{r'} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \left(\left(\frac{1}{r'} - \frac{3}{c} \frac{\dot{r}'}{r'} - \frac{\ddot{r}'}{c^2} + \frac{2}{c^2} \frac{\dot{r}'^2}{r'} \right) \vec{r}' - \left(1 - \frac{2\dot{r}'}{c} \right) \frac{\vec{v}'}{c} - \frac{r' \vec{a}'}{c^2} \right)
 \end{aligned}$$

이 된다.

여전히 그 의미가 쉽게 와 닿지는 않는다. 하지만 단위 벡터가 사라진 대신에 위치 벡터와 속도 벡터, 가속도 벡터 같은 익숙한 물리량들이 등장하여 조금은 구체화 되기는 하였다. 수식의 / 달린 해당 물리량의 표기는 관점에 대한 표기인데 그 부분을 없앨 필요가 있어 보인다. 또한 수식 유도 중에 $\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\vec{v}'$ 로 적용한 것에 대해서도 좌표계 관점에 따른 표현의 변화에 익숙하지 않은 사람에게는 설명이 필요한 부분일 것이다. 사실 전통적인 전자기학 서적에서는 지체된 퍼텐셜에 대한 설명을 할 때 이러한 부분으로부터 출발하는데 나는 그 부분을 생략했었다. 지체된 퍼텐셜이라고는 하지만 사실은 이동하는 원천에 의한 퍼텐셜이었기 때문에 실은 그 부분을 꼭 다루야 할 필요가 없었기 때문이다. 과거의 전통이라고는 하지만 현재의 보다 정제된 지식을 알고 있는 입장에서는 과거 정제되기 전의 복잡한 진리 탐구 과정을 담고 있기는 하지만 불필요한 군더더기 개념도 담고 있는 복잡한 설명을 따를 생각은 없었다. 음수나 0의 개념을 지금은 초등학교에서 배우지만 과거에 그것이 발견된 과정이 초등학교 과정은 아니었고 그 발견 과정으로부터 배우기 시작하는 것이 필수는 아니라고 보는 것과 마찬가지로 이다. 하지만 이제 그 부분을 다루지 않고는 나아갈 수가 없는 부분에도 달했다. 복잡한 설명이 필요한 그림을 그려야만 해서 미루어 두기도 했었다.

파인만의 공식에서 / 표기가 붙은 물리량 들은 파인만이 직접 설명을 하지는 않았지만 물리학에서 보통 일반적으로 통용되기로는 대체로 어떤 상대편 관찰자의 주관적 관점에 따른 표기라는 의미이다. 즉, 이 표현들에는 어떤 관찰자의 주관적 입장이라는 것이 존재하고 그것이 항상 보편 타당한 객관적인 절대적인 시공간이 아니라는 의미가 내포되어있다. 실은 상대성이론이 등장한 이후로부터는 항상 보편 타당한 객관적인 절대적 시공간의 기준이란 것은 없다는 것이 밝혀져 버렸다. 그리하여, 어떤 한 가지 사건을 설명하기 위해서는 최소한 두 가지 이상의 입장에서 어떻게 관찰되는 지를 기술해야지만 온전히 사건을 기술할 수 있게 되었으니 상대론 이후의 물리학이 절대적인 좌표계에서의 기술 한 가지 만을 필요로 하던 이전보다 어려워진 것은 사실이다.

그러나, 상대론이 등장한 이후에도 보편 타당한 절대적 시공간은 없을지라도 여전히 관찰자 1의 주관과 관찰자 2의 주관 외에도 제 3자의 관점이라는 것은 여전히 가능하고, 가능해야만 한다. 그리고, 그런 제 3의 관점을 적당히 선택하여 마치 과거의 절대적인 좌표계와 같은 용도로 사용하고 있는 것이 대부분의 물리학 기술에서 사용하고 있는 입장이다.

이번 문제의 경우는 그러한 제 3의 관점을 먼저 설명하는 것으로 시작

하는 것이 좋을듯하다.

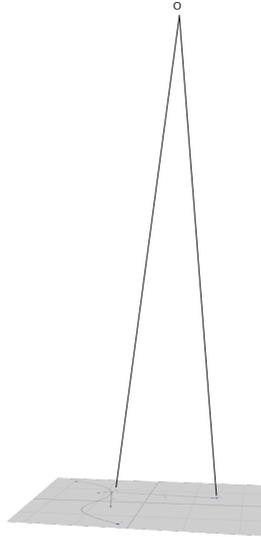


Figure 71: 제 3의 관점

어떤 운동하는 물체와 관찰자가 같은 평면 상에 존재한다면, 그 두 점 사이에 존재하고 평면으로부터 수직으로 멀리 떨어진 위치 O 에서는 두 위치와의 거리가 동일해지게 되며, 따라서 그 O 점에서는 동시에 두 위치를 관찰한다고 볼 수 있다. 바로 절대적인 시공간 개념과 흡사해지는 것이다. 이 관점이 바로 아무런 수식이 붙지 않는 원래의 좌표계이고, 이 관점을 기준으로 / 좌표계가 정의 된다.

그러나, 사실 이 관점은 항상 가능한 관점은 아니다. 이 그림에서는 움직이는 물체가 관점 O에 대하여 항상 수직으로 움직이기 때문에 움직이는 물체의 관점과 / 의 관점을 동시에 비교할 수 있는 O 관점이 가능했지만 사실은 움직이는 물체는 위 그림의 평면을 벗어나서 움직일 수도 있기 때문에 움직이는 물체와 / 관점의 동시를 볼 수 있는 O 관점의 특성이 깨어질 수 있다. 그러나, 이 관점은 / 좌표계와 움직이는 물체 좌표계의 관계를 정의하기 위한 목적이 전부로 그 역할을 다했고 실제 계산에서는 사용되지도 않으므로 이 관점이 실제로는 항상 가능하지는 않다는 이유로 인한 문제가 발생하지는 않는다.

이 관점에서 바라보는 움직이는 물체와 그것을 관찰하는 / 좌표계를

살펴보자.

제 3의 관점 그림에서 O 관찰자가 보는 사건들은 다음과 같다.

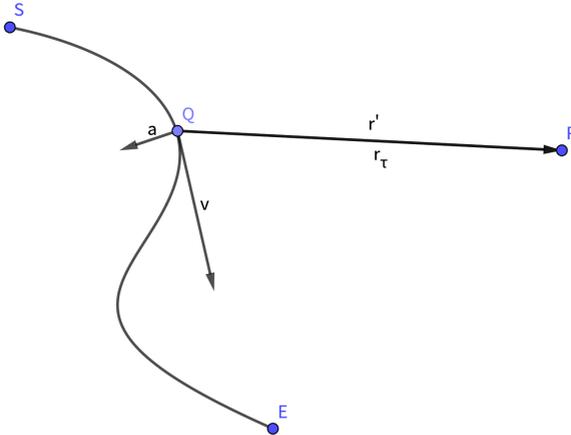


Figure 72: 이동하는 전하 Q와 P점에서의 관찰자

파인만의 그림을 거의 베껴왔는데, 그의 그림에서 아무런 표시 없는 r 벡터는 삭제하였다. 이후 전혀 사용되지 않으며, 별 도움이 되지 않는다고 보았기 때문이다. 대신 \vec{r}'_T 표시를 추가하였다.

파인만의 그림과 마찬가지로 전하 Q가 S로부터 E로 향하는 무작위 경로를 어느 순간에 속도 v 와 가속도 a 를 겪으며 통과 하는 순간의 그림이다. 이때의 시간은 τ 이다. 이때 점 Q와 점 P간의 거리를 r_T 라고 한다면, 이때 발생한 Q로부터의 전자기적 영향이 점 P에 전달되는 데에는 $\frac{r_T}{c}$ 만큼의 시간이 걸리고, t' 시에 점 P에 도달하여 영향을 미치게 된다. 이때 점 P에서 관찰하는 Q와 P간의 거리는 r' 이다. 여기에서 $\vec{r}'_T = \vec{r}'$ 으로서 동일하고, 구분할 필요가 없음을 알 수 있다.

이때 P점에서 Q의 각종 물리량과 사건들을 관측할 때 그 표기 시간은 t' 라고 할 수 있다. 그리고, 그 사건이 발생한 Q에서의 시간은 τ 라고 한다면, 그 둘의 관계는 $\tau = t' - \frac{r'_T}{c}$ 이다. r 에 위 첨자와 아래 첨자를 다 붙인 것은 양쪽 어느 경우이건 마찬가지이기 때문에 둘 다를 동시에 중복 표시한다는

의미로 임시로 그리하였다.

이들을 바탕으로 다른 물리량들을 살펴보면, 먼저 v 의 경우, 각 관점에서 $\vec{v}_r = -\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ 이고 $\vec{v}' = -\frac{d\vec{r}'}{dt'}$ 이다. -부호는 r 벡터의 출발점이 전기장을 측정하는 위치가 아닌 전기장의 근원인 움직이는 전하이기 때문이다. 이렇게 일반적인 경우와 반대의 정의를 사용하는 이유는 위치 벡터 r 과 전기장 벡터 E 의 방향을 일치 시키기 위함으로 원래 파인만이 사용한 관습이기도 하다.

P 점에서 관측되는 물리량 중 가장 그 특징을 뚜렷이 알 수 있는 v' 의 경우를 살펴 보기로 한다. v 벡터가 r 벡터와 수직 방향, Q와 P 간의 거리가 일정할 때는 특별한 일이 일어나지 않지만 v 벡터가 r 벡터의 성분을 가질 때, 두 점 간의 거리가 변할 때에는 그렇지 않음을 볼 수 있다.

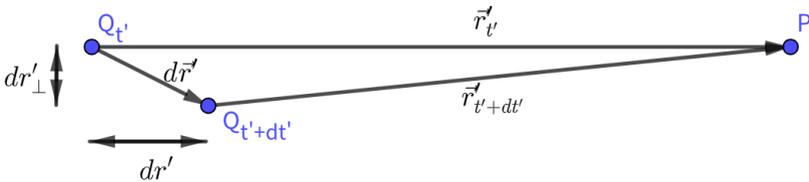


Figure 73: r 의 미세변위

위 그림에서 dr' 이 미소 변화이므로 $\vec{r}'_{t'}$ 과 $\vec{r}'_{t'+dt'}$ 이 실제로는 평행함을 감안하고 보아야 한다. 이때 근원 Q 전하에서 dr 만큼 거리가 변할 때 걸리는 시간은 당연히 Q에서의 시간 $d\tau$ 이다. τ 는 Q에서의 시간이지만 Q 관성계에서의 상대론 적인 보정을 한 시간은 아니다. 단순히 Q위치에서 '제 3의 관점'인 O 위치와 동일한 속도로 흐르고 있는 시간이다. 이것이 계산에 사용 가능한 실제의 물리량임을 설명하기 위하여 앞서 '제 3의 관점' 그림을 통한 설명이 필요하였다. 제 3의 관점에서 본 τ 시간에 기반한 $dr^'$ 사건이 P점에서 관찰 될 때에는 t' 시간에 기반한 dt' 시간 동안의 사건으로 변화된다. P점에서의 묘사는 여기서는 정지한 상태만을 다루겠지만 보고자 하는 물리량에 따라 필요하다면 움직이는 상태에서의 상대론 적인 보정도 해야만 할 것이다. 하지만 실은 P점이 움직일 때에도 전자기 현상은 원래가 이미 상대론 적이라 O 관점에서 관찰한 P점의 물체가 느끼는 전자기 장에 의한 물리 현상을 기술하기 위해서 상대론 적인 보정을 더해야 할 필요는 없다.

이러한 조건에서 두 관점에서 측정 된 시간을 비교해보면 위 그림에서의 경우 $dt' < d\tau$ 가 될 것임을 알 수 있다. P 점에서의 관찰로는 고전적인 적색 편이 식 만큼의 비율로 τ 관점 Q 사건의 간격이 촘촘하게 청색 편이 되어 보일 것이고 그에 따라 속도나 가속도 등 모든 시간과 관계되는 물리량들이 다르게 보이게 될 것을 예측할 수 있다. 관찰하는 관성계는 O 관점이므로 r 자체는 Q 나 P 관점과 무관하게 동일하게 측정 된다.

이제부터 그 두 가지 틀에서의 물리량들 간의 관계를 나열할 것인데, 각각 τ 틀과 τ' 틀로 부를 것이지만 파인만 공식과의 호환을 위하여 t' 은 t 로 표시할 것이다. t' 과 t 시간의 차이는 항상 상수이고 절대적인 관찰자 시점은 어차피 사용하지 않으므로 τ 을 없애도 아무 문제없다. 그리고, τ 틀에서 시간 τ 를 제외한 다른 모든 물리량에서 τ 표기는 생략할 것이다. 시간을 제외한 물리량과 관련해서는 τ 틀에서의 물리량들이 앞서 설명한 대로 제 3의 객관적인 관찰자 시점, 임시의 절대 좌표 틀에서의 물리량들과 동일한 시간 간격을 사용하는 일반적인 물리량들이기 때문이다. 예컨대 Q 가 가까워 지거나 멀어지는 속력을 의미하는 \dot{r} 의 경우 가능한 값의 범위는 $-c < \dot{r} < c$ 로서 정상적인 개념과 동일하지만 P 점에서의 τ 관점에서 보는 꺾보기 속도인 \dot{r}' 은 실제 물리량이 아닌 $-\infty < \dot{r}' < \frac{c}{2}$ 의 범위를 가지는 꺾보기 물리량이기 때문이다. 그리고, 앞서 설명한 임시의 절대 좌표계는 개념을 설명하기 위하여 도입한 것일 뿐 결코 직접 실제 계산이나 물리량 표기에 사용하지 않을 것이기 때문에 그 구분을 위한 표현을 남겨둘 필요가 없다. 따라서 실제로는 $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_\tau, \vec{a} \rightarrow \vec{a}_\tau, \dot{r} \rightarrow \dot{r}_\tau, \ddot{r} \rightarrow \ddot{r}_\tau$ 등 임을 유의하기 바란다. 혹 깜박 하고 대응 관계를 여기에서 표기안한 것이 있더라도 모든 물리량은 τ 틀 아니면 τ' 틀 둘 중 하나에서 기술되며 t 를 제외한 τ 표기가 없는 모든 물리량은 당연히 τ 틀에서 기술한 것이다. 단 $r' = r_\tau, \vec{r}' = \vec{r}_\tau$ 로서 r 관련 항들은 '이동하는 전하 Q와 P 점에서의 관찰자' 그림에서 묘사한 대로 양쪽 틀에서 구분되지 않는다.

우선 파인만 공식의 분석에 필요한 물리량들의 변환 관계와 그 유도를 제시하면 다음과 같다. 필요한 항목들이 많으므로 개별적인 설명은 생략하였다. 대신 유도 과정을 되도록 자세하게 표기하였다.

$$\tau = t - \frac{r}{c}, \quad r' = r, \quad \vec{r}' = \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \frac{dt}{dt} - \frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \\ &= 1 - \frac{\dot{r}}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{r}' &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\ &= \dot{r} \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) = \dot{r} - \frac{\dot{r}\dot{r}'}{c} \rightarrow \dot{r}' + \frac{\dot{r}\dot{r}'}{c} = \dot{r} \therefore \\ &= \frac{\dot{r}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= 1 - \frac{\dot{r}}{c} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\dot{r}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\tau'} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau'} \\ &= \frac{\dot{r}}{1 - \frac{\dot{r}}{c}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{r}' &= \frac{d\dot{r}'}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{\dot{r}}{c \left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^2} \frac{d\dot{r}}{dt} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{\frac{\dot{r}}{c}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \right) \frac{d\dot{r}}{dt} \frac{d\tau}{dt} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^2} \ddot{r} \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \\ &= \frac{\ddot{r}}{\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \frac{-d\vec{r}}{dt} = \frac{-d\vec{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\ &= \frac{\vec{v}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\vec{v}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \right) \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^2} \frac{d\vec{v}}{d\tau} - \frac{\vec{v}}{\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^3} \frac{d\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)}{d\tau} \\ &= \frac{\vec{a}}{\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^2} - \frac{\vec{v}}{\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^3} \frac{\dot{r}}{c} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)^2} \left(\vec{a} - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \frac{\dot{r}}{c} \vec{v} \right) \end{aligned}$$

이 관계식들을 파인만 공식에 대입하여 / 표현들을 없애보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \left(\left(\frac{1}{r'} - \frac{3}{c} \frac{\dot{r}'}{r'} - \frac{\ddot{r}'}{c^2} + \frac{2}{c^2} \frac{\dot{r}'^2}{r'} \right) \vec{r}' - \left(1 - \frac{2\dot{r}'}{c} \right) \frac{\vec{v}'}{c} - \frac{r'\vec{a}'}{c^2} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{cr} \frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{r}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^3} + \frac{2}{c^2 r} \left(\frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}} \right)^2 \right) \vec{r} - \left(1 - \frac{2}{c} \frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}} \right) \frac{1}{c} \frac{\vec{v}}{1+\frac{v}{c}} - \frac{r}{c^2} \frac{1}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \left(\vec{a} - \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \frac{\dot{r}}{c} \vec{v} \right) \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\left(\frac{1}{r} \left(1 - \frac{3}{c} \frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}} + \frac{2}{c^2} \left(\frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}} \right)^2 \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{r}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^3} \right) \vec{r} - \frac{1-\frac{v}{c}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r}{c^2} \frac{1}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \left(\vec{a} - \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \frac{\dot{r}}{c} \vec{v} \right) \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\left(\frac{1}{r} \left(1 - \frac{2}{c} \frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}} \right) \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{r}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^3} \right) \vec{r} - \frac{1-\frac{v}{c}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \frac{\vec{v}}{c} + \frac{1}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^3} \frac{r\dot{r}}{c^2} \frac{\vec{v}}{c} - \frac{1}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \frac{r\vec{a}}{c^2} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\left(\frac{1}{r} \frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}} \frac{1}{1+\frac{v}{c}} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{r}}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^3} \right) \vec{r} - \frac{1}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^3} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r\dot{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{1}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \frac{r\vec{a}}{c^2} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \left(\left(\frac{1}{r} \left(1 - \frac{v}{c} \right) - \frac{\ddot{r}}{c^2} \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \right) \vec{r} - \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r\dot{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \left(\frac{1}{1+\frac{v}{c}} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r\dot{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r\dot{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1+\frac{v}{c}\right)^2} \left(\frac{1}{1+\frac{v}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)
\end{aligned}$$

마지막 줄은 원심력의 정의를 이용한 다음의 관계식을 이용하여 보다 익숙한 물리량인 속도와 가속도로 바꾸어 표현한 것이다.

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= -\vec{v} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -v_{\parallel} \\
\ddot{r} &= \frac{v_{\parallel}^2}{r} - \vec{a} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \\
\dot{r}^2 + r\ddot{r} &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - \vec{a} \cdot \vec{r} \\
&= v^2 - \vec{a} \cdot \vec{r}
\end{aligned}$$

이제야 파인만 공식의 의미를 직관적으로 파악할 수 있게 되었다. 거리 벡터와 속도 벡터, 가속도 벡터들의 방향과 크기는 익숙하고 사용하기에 편한 개념이다. 파인만이 왜 애초에 이 표현을 쓰지 않았는지는 알 수 없으나 차후 짐작되는 이유는 논하게 될 것이다.

그전에 살펴보려 하는 것은 파인만 이후에 이 비슷한 공식을 다룬 여러 문서들이 있지만 그중 아마 가장 유명한 것 중 하나 인 전자기학 교재로 자주 사용되는 그리피스의 책이다. 1990년대에 출판된 그 책에서는 얼핏 파인만 공식과 다른 공식이 아닌가 싶은 다음과 같은 공식이 등장한다. 파인만에 대한 언급이 없고, 유도 과정의 묘사를 보아서는 그리피스 본인이 직접 유도한 공식으로 보인다. 유도 과정도 내가 조사하고 재구성 해본 파인만의 방식과는 조금 다르다. 물론 본질적으로는 같다.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\vec{r}\cdot\vec{u})^3} ((c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}))$$

사실 이대로는 아니고 표시할 폰트를 찾을 수 없는 필기체 r로 위 공식의 r을 대체해야 한다. 그렇게 표기한 이유는 뭔가 다른 개념의 r을 도입하고 싶었기 때문으로 짐작되는데 그것도 차후에 다룰 것이다. 지금은 이 공식을 그리피스가 제공한 정의 $\vec{u} \equiv c\hat{r} - \vec{v}$ 과 이제는 자주 사용한

벡터대수 공식 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ 을 이용하여 좀 더 알아보기 쉬운 꼴로 변형 해보기로 한다.

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3} ((c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a})) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(c\vec{r} - \vec{r} \cdot \vec{v})^3} ((c^2 - v^2)(c\hat{r} - \vec{v}) + \vec{r} \times ((c\hat{r} - \vec{v}) \times \vec{a})) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{c^3 r^3 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^3} ((c^3 - cv^2)\hat{r} - (c^2 - v^2)\vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{a})(c\hat{r} - \vec{v}) - (\vec{r} \cdot (c\hat{r} - \vec{v}))\vec{a}) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{c^3 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^3} ((c^3 - cv^2)\hat{r} - (c^2 - v^2)\vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{a})(c\hat{r} - \vec{v}) - (rc + r\dot{r})\vec{a}) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^2 c^3} \left(\frac{c^3 - cv^2 + c\vec{r} \cdot \vec{a}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \hat{r} - \frac{c^2 - v^2 + \vec{r} \cdot \vec{a}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \vec{v} - c \frac{1 + \frac{\dot{r}}{c}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} r \vec{a} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{c^2}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \hat{r} - \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{c^2}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)
 \end{aligned}$$

알고 보니

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{c^2} \right) (\hat{r} - \vec{\beta})}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)$$

로서 파인만 공식과 동일함을 알 수 있다. r의 개념이 조금 다른 뜻이 서술하고 있으나, 이런 식으로 동일하게 정리되는 공식에서 r의 개념이 본질적으로 다를 리가 없다. 앞으로 설명할 유도 방식에서의 골치 아픈 개념들을 다루는 것을 회피하기 위해 그리피스는 공식에 사용한 r이 일반적인 r이 아니라고 생각한 것으로 보인다.

파인만은 자신의 공식 유도 방법에 대하여 책에서 아무런 언급을 하지 않았다. 파인만의 책 외에 어떤 알려지지 않은 문서가 더 있는지는 알 수 없으나, 그리피스의 책 등의 다른 자료들을 찾아 보아도 단편적인 자료들 뿐 완전하고 구체적인 공식의 유도 방법은 마찬가지로 찾아볼 수 없었다. 그러나, 공통적으로 등장하는 힌트들은 있었다. 그것을 바탕으로 파인만의 공식 유도를 재구성해보니 파인만이 왜 자신의 유도 방법을 공식적으로 발표하지 않았는지 알만한 이유가 있었다. 이제 파인만의 공식을 유도하여 보겠다.

먼저 공통적으로 등장하는 힌트에 대해서 설명하자면, 그것은 ∇ 기호에 대한 재 정의이다. 일단 그 재 정의를 소개하자면,

$$\begin{aligned}
 \nabla r &= \dot{r}' \nabla t = \frac{\dot{r}'}{r} \frac{\vec{r}}{r} \\
 &= \frac{\dot{r}'}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \frac{1}{r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{r}'}{r} \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \\
 &= \frac{1 - \frac{\dot{r}'}{c}}{\dot{r}'} \dot{r}' \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \\
 &= \dot{r}' \nabla \tau
 \end{aligned}$$

이다. 이 변환 공식들의 유도라던가 의미에 대한 해설은 잠시 뒤로 미루기로 하고 지금은 ∇ 연산의 변형과 그 / 틀과 τ 틀 에서의 표현 방법에 대한 주어진 규칙으로서 만 다를 것이다.

기본적인 공식은 앞서 구한 맥스웰 방정식의 해들 중 전기장 식인

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

과 지체된 퍼텐셜에 대해 구했던 식 들인

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r \left(1 + \frac{r}{c}\right)}$$

과

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r \left(1 + \frac{r}{c}\right)}$$

이다. $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ 을 이용하여 지체된 퍼텐셜 식들을 전기장 식에 대입하면

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left(\frac{1}{r(1+\frac{r}{c})} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}}{r(1+\frac{r}{c})} \right) \right)$$

이 된다.

이대로 계산도 가능하지만 조금 복잡해지고, 파인만은 아마 이 식을 / 틀에서 계산한 듯 하다. 그러기 위해서는 이 식을 / 틀의 물리량들로 변환해야 하는데 그것은 앞서 이미 반대 방향으로는 한번 해본 변환이다. 다만 앞서의 변환 식들에 다음 변환 식을 추가해야 한다.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{-d\vec{r}}{d\tau} = \frac{-d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{\vec{v}'}{1 - \frac{r'}{c}} \end{aligned}$$

변환을 실행하면,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left(\frac{1}{r' \left(1 + \frac{\dot{r}'}{c} \right)} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\vec{v}'}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}}}{r' \left(1 + \frac{\dot{r}'}{c} \right)} \right) \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left(\frac{1}{r'} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}'}{r'} \right) \right)\end{aligned}$$

이 된다. 이 식을 바탕으로 위에서 소개한 ∇ 연산에 대한 변형된 정의를 적용하면,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left(\frac{1}{r'} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}'}{r'} \right) \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla \left(\frac{1}{r'} - \frac{\dot{r}'}{r'c} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{a}'}{r'} - \frac{\dot{r}'\vec{v}'}{r'^2} \right) \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r'^2} \nabla r' - \frac{1}{r'c} \nabla \frac{dr'}{dt} + \frac{\dot{r}'}{cr'^2} \nabla r' + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{a}'}{r'} - \frac{\dot{r}'\vec{v}'}{r'^2} \right) \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{r}'}{r'^3} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) - \frac{1}{r'c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}'}{r'} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \right) + \frac{\dot{r}'}{cr'^2} \frac{\vec{r}'}{r'} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{a}'}{r'} - \frac{\dot{r}'\vec{v}'}{r'^2} \right) \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{r}'}{r'^3} + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^3c} + \frac{\vec{v}'}{r'^2c} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) + \frac{\vec{r}'}{r'c} \frac{\dot{r}'}{r'^2} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^2c^2} + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{cr'^3} - \frac{\dot{r}'^2\vec{r}'}{c^2r'^3} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{a}'}{r'} - \frac{\dot{r}'\vec{v}'}{r'^2} \right) \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{r}'}{r'^3} + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^3c} + \frac{\vec{v}'}{r'^2c} - \frac{\dot{r}'\vec{v}'}{r'^2c^2} + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^3c} - \frac{\dot{r}'^2\vec{r}'}{r'^3c^2} + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^2c^2} + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^3c} - \frac{\dot{r}'^2\vec{r}'}{c^2r'^3} + \frac{\vec{a}'}{r'c^2} - \frac{\dot{r}'\vec{v}'}{r'^2c^2} \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{r}'}{r'^3} + 3\frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^3c} + \frac{\dot{r}'\vec{r}'}{r'^2c^2} - 2\frac{\dot{r}'^2\vec{r}'}{r'^3c^2} + \frac{\vec{v}'}{r'^2c} - 2\frac{\dot{r}'\vec{v}'}{r'^2c^2} + \frac{\vec{a}'}{r'c^2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \left(\left(\frac{1}{r'} - 3\frac{\dot{r}'}{r'c} - \frac{\dot{r}'}{c^2} + 2\frac{\dot{r}'^2}{r'c^2} \right) \vec{r}' - \left(\frac{1}{c} - 2\frac{\dot{r}'}{c^2} \right) \vec{v}' - \frac{r'\vec{a}'}{c^2} \right)\end{aligned}$$

파인만 공식을 분해 해본 결과와 동일함을 확인할 수 있다.

사실 / 틀로 미리 변환할 필요 없이 τ 틀에서도 직접 구할 수는 있다. 그러나 다음 항을 미리 계산해 두어야 한다.

$$\begin{aligned}
\nabla \dot{r} &= \nabla \frac{dr}{d\tau} = \nabla \left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = \nabla \left(\dot{r}' \frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} \right) \\
&= \frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} \nabla \dot{r}' + \frac{\dot{r}'}{c \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)^2} \nabla \dot{r}' = \left(\frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} + \frac{\dot{r}'}{c \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)^2} \right) \nabla \dot{r}' \\
&= \left(\frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} + \frac{\dot{r}'}{c \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)^2} \right) \frac{d}{dt} \nabla r = \left(\frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} + \frac{\dot{r}'}{c \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)^2} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} + \frac{\dot{r}'}{c \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\vec{r}}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \frac{dr}{dt} - \frac{\vec{r}}{rc} \frac{d\dot{r}'}{dt} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} + \frac{\dot{r}'}{c \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)^2} \right) \left(\frac{-1}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \vec{v}' - \frac{\vec{r}}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \dot{r}' - \frac{\vec{r}}{rc} \dot{r}' \right) \\
&= \left(1 + \frac{\dot{r}'}{c \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)} \right) \left(\frac{-1}{r} \vec{v}' - \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r}' - \frac{\vec{r}}{rc \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)} \dot{r}' \right) \\
&= \frac{1}{1 - \frac{\dot{r}'}{c}} \left(\frac{-1}{r} \vec{v}' - \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r}' - \frac{\vec{r}}{rc \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right)} \dot{r}' \right) \\
&= \left(1 + \frac{\dot{r}'}{c} \right) \left(\frac{-1}{r} \vec{v}' \left(\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}'}{c}} \right) - \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{\dot{r}'}{1 + \frac{\dot{r}'}{c}} - \left(1 + \frac{\dot{r}'}{c} \right) \frac{\vec{r}}{rc} \frac{\ddot{r}'}{\left(1 + \frac{\dot{r}'}{c} \right)^2} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c(1 + \frac{\dot{r}'}{c})} \right) \right) \\
&= \frac{-\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r} \dot{r}}{r^2} - \frac{\vec{r} \ddot{r}}{rc} \left(1 - \frac{\dot{r}}{c(1 + \frac{\dot{r}}{c})} \right) \\
&= \frac{-\vec{v}}{r} - \left(\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\ddot{r}}{c} - \frac{\dot{r} \ddot{r}}{c^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right)} \right) \frac{\vec{r}}{r}
\end{aligned}$$

이를 적용해보면,

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla \left(\frac{1}{r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}} \right) \right] \\
&= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla \left(\frac{1}{r + \frac{r\dot{r}}{c}} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{r + \frac{r\dot{r}}{c}} \right) \right] \\
&= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} \nabla \left(r + \frac{r\dot{r}}{c} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{\vec{v}}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r + \frac{r\dot{r}}{c} \right) \right) \right] \\
&= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} (\nabla r + \nabla \left(\frac{r\dot{r}}{c} \right)) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \frac{dr}{dt} - \frac{\vec{v}}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\dot{r}}{c} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{r}{c} \frac{\partial \dot{r}}{\partial t} \right) \right) \right] \\
&= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} (\nabla r + \frac{\dot{r}}{c} \nabla r + \frac{r}{c} \nabla \dot{r}) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})} \vec{a} - \frac{\vec{v}}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\dot{r}}{c} \frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{r}{c} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \tau} \right) \right) \frac{dr}{dt} \right] \\
&= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} \left((1 + \frac{\dot{r}}{c}) \nabla r + \frac{r}{c} \nabla \dot{r} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})} \vec{a} - \frac{\vec{v}}{(r + \frac{r\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\dot{r}}{c} \frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{r}{c} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \tau} \right) \right) \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\dot{r}}{c}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \vec{r} + \frac{r}{c} \nabla \dot{r} \right) - \frac{1}{c^2} \left(r \vec{a} - \frac{\vec{v}}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(\dot{r} + \frac{r\ddot{r}}{c} + \dot{r}^2 \right) \right) \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{r}{c} \left(-\frac{\vec{v}}{r} - \left(\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}}{c} - \frac{\dot{r}\ddot{r}}{c^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)} \right) \frac{\vec{r}}{r} \right) \right) + \frac{\vec{v}}{c^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)} \left(\dot{r} + \frac{r\ddot{r}}{c} + \dot{r}^2 \right) - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{r}{c} \left(\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\ddot{r}}{c} - \frac{\dot{r}\ddot{r}}{c^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)} \right) \right) \frac{\vec{r}}{r} \right) - \frac{\vec{v}}{c} + \frac{\vec{v}}{c^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)} \left(\dot{r} + \frac{r\ddot{r}}{c} + \dot{r}^2 \right) - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\left(1 - \frac{\dot{r}}{c} - \frac{r\ddot{r}}{c^2} + \frac{r\dot{r}\ddot{r}}{c^3 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(\frac{\dot{r}}{c} + \frac{r\ddot{r}}{c^2} + \dot{r}^2 \right) \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(\left(1 - \frac{\dot{r}}{c} - \frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \left(1 + \frac{\dot{r}}{c} \right) + \frac{r\dot{r}\ddot{r}}{c^3} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 + \frac{\dot{r}}{c} - \frac{\dot{r}}{c} - \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} - \frac{r\ddot{r}}{c^2} + \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} - \frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \frac{\dot{r}}{c} + \frac{r\dot{r}\ddot{r}}{c^3} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} - \frac{r\ddot{r}}{c^2} + \frac{\dot{r}}{c} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r\dot{r}\ddot{r}}{c^3} + \frac{r\dot{r}\ddot{r}}{c^3} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right] \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left[\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right]
\end{aligned}$$

직접 계산이 되는 것을 확인할 수 있다.

그러나, 위 계산에는 한 가지 함정이 있다.

이 책의 파인만 공식에 대한 논의를 여기까지 따라온 독자들은 지금 이 설명들이 일반적인 설명 순서와 반대로 진행되고 있음을 간파할 수 있었을 것이다. 가장 핵심에 대한 설명을 계속 뒤로 미루고 일단 계산부터 하고 그 다음에 그 근본이 되는 수식의 유도로 다시 들어가 보는 식이었다. 그럴 수밖에 없었던 이유를 이제 털어놓을 차례이다.

$$\text{마지막 계산의 준비 계산에서 } \nabla \dot{r} = \nabla \frac{dr}{d\tau} = \nabla \left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = \nabla \left(\dot{r}' \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

로 시작하여 차후에 $\frac{d}{dt} \nabla r$ 한 부분에 문제가 있다. 원래, 보다 자연스러운 것은 τ 틀에서는 처음부터 $\nabla \dot{r} = \nabla \frac{dr}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \nabla r$ 로 유도해 나가는 것이 아니겠는가. 그러나, 문제는 그 두 가지 경로의 결과가 다르다는 것이다. 원래 시간에 대한 미분을 ∇ 바깥으로 빼어낸 것은 미분의 순서를 바꾸어도 상관없다는 클레로의 정리에 기반한 계산 기법인데 동일한 계산에 대해

그 결과가 바뀐다는 것은 변형한 ∇ 가 더 이상 일반적인 미분이 아니라는 이야기에 다름없다. 그리고 이로 인해 τ 에 대한 미분만이 순서를 바꾸어 ∇ 연산 밖으로 꺼낼 수 없는 것이 아니라 t 에 대한 미분 역시 순서를 바꾸는 것이 당연한지 알 수 없게 된 것이다.

그리고, 앞에서 마찬가지로 뒤로 미루어 두었던 것이 ∇r 의 정의에 대한 유도임을 기억할 것이다. 다시 돌이켜 보자면

$$\begin{aligned}\nabla r &= \dot{r}' \nabla t = \frac{\dot{r}'}{\dot{r}} \frac{\vec{r}}{r} \\ &= \frac{\dot{r}'}{1 + \frac{\dot{r}'}{c}} \frac{1}{r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{r}'}{r} \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}'}{c}} \\ &= \frac{1 - \frac{\dot{r}'}{c}}{\dot{r}'} \dot{r}' \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}'}{c} \right) \\ &= \dot{r}' \nabla \tau\end{aligned}$$

로 그 정의만 제시하고 설명 없이 지나갔었다. 이제 그 유도 방법에 대해서 고백하자면 사실 이게 전부라는 사실이다. 정확히는 첫 줄이 유도 과정의 전부이다. 나머지는 구체적으로 사용하기 편리하도록 여러 변형 표현을 나열해 둔 것 일 뿐이다. 다만 첫 줄이 등장하게 되는 사고 과정은 설명이 필요할 것이다.

∇ (델, 나블라, 구배, 기울기 등 읽는 방법이 너무 많으므로 각자 마음대로 읽기로 약속된 셈이다. HTML이나 LaTeX 코드에서는 형태가 비슷한 고대의 그리스의 약기에서 비롯된 이름인 나블라로 표기되니 이것이 표준인 듯도 하지만 알게 뭔가 이미 혼돈의 도가니인 것을. 나는 굳이 읽는다면 델로 읽는다. 그리고 웬만하면 안 읽는다.) 연산의 정의는 수학자이지만 물리학에도 기여가 큰 해밀턴(William Rowan Hamilton)이 도입한 정의에 따르면,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

이다. 복잡한 의미를 따져보아야 머리만 아프고, 수학은 특히 대수학은 원래 그런거 신경 끄고도 형식 규칙만 잘 따르면 올바른 답을 내도록 '설계된' 사고 체계이므로 이 연산 도입의 역사라던가 그 물리적 의미 같은 것은 이미 고등학교에서 배운 것으로 간주하고 넘어가기로 하겠다. 이과라면 고등학교 아니면 늦어도 대학 1학년 시절에는 배우게 되는 기초 개념이다. 그리고 원래 기초일수록 그 의미를 논하기는 더 어려운 법이다. 원래 이 책의 서두에서 책의 독자 층을 이과 고등학생이나 대학 초급생 정도로 하기로 했지만 그것은 물리학에 대해서만 그렇고, 수학에 대해서는 이런 수학적 기초에 대한 설명은 나의 역량을 넘어서는 부분으로서 생략하기로

하겠단. 여기서서는 이 연산의 형식만 따져 보기로 한다. 사실 그것 만으로도 대부분의 독자들은 크게 불만 없을 것이다. 위 연산은 기본적인 대수 규칙에 따라 다음과 같이 변형될 수 있다. 다음 단계로 가는데 머뭇거릴 것 없도록 이번에는 f 대신 r 을 바로 도입하겠다.

$$\begin{aligned}
 \nabla r &= \frac{\partial r}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{z} \\
 &= \frac{dr}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} \hat{x} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} \hat{y} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z} \\
 &= \frac{dr}{dt} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{z} \right) \\
 &= \frac{dr}{dt} \nabla t \\
 &= \dot{r}' \nabla t
 \end{aligned}$$

마지막 / 표기는 지금의 특정한 문제에서의 표기로 바로 넘어간 것이다. 한편 ∇r 에 대한 다른 잘 알려진 값이 존재한다. 바로 $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ 이라는 값으로서 ∇ 과 r의 수학적 정의로부터 직접 구해지는 값이다. 이 값을 지금의 문제에 적용한다면 다음과 같은 두 가지 경우를 생각해 보아야 할 것이다.

우선, Q가 정지해 있거나 혹은 c가 무한대인 경우에는 이 값에 수렴한다고 볼 수 있다. 그 경우 ∇t 의 값은 당연히 $\nabla t = \frac{1}{\dot{r}'} \frac{\vec{r}}{r}$ 임이 유추 가능하다. 다음으로 생각해야 할 것은, 이제 Q가 움직이고 c가 무한대가 아닐 경우이다. 이때, 사실 가장 보편적으로 생각할 수 있는 것은 ∇ 은 시간이나 거리 같은 물리량이 아닌 미분 연산자이므로 그런 것에는 영향을 받지 않고 변함없어야 한다는 것이다. 그러나, 그런 방법으로는 맥스웰 방정식을 기반으로 특수상대론 적으로 보정 된 물리적으로 모순 없는 전자기장을 계산해 내는데 실패한다는 것이 문제이다.

퍼셀의 책을 보면 파인만 이후 등장한 임의의 운동을 하는 전하에 대한 풀이는 없어도 등속 직선 운동을 하는 전하에 대한 분석은 이미 되어있음을 볼 수 있다. 그것을 직접 다루지는 않겠다. 퍼셀의 공식은 상대론의 길이 수축과 시간 지연 등의 개념을 이용하여 등속 운동하는 전기장의 특성을 추측해 낸 공식인데, 그 퍼셀의 공식에 대한 검증은 내가 해보지 않은 것이라 생략하려 한다. 퍼셀의 공식을 검증하지 않고도 어떻게 신뢰하는가 하는 문제에 있어서는, 파인만은 그의 공식에 대한 설명으로 퍼셀이 요구 하였던 조건을 만족 시키는 것을 보였었다. 그리피스 또한 마찬가지였다. 그리고, 나 또한 그 부분을 간략히 언급은 할 것이다. 사실은 퍼셀처럼 계산하지 않아도 퍼셀 공식의 중요한 특성이 반드시 상대론 적으로 필요 불가결 하다는 것은 사고 실험 만으로도 알 수 있기에 굳이 파인만 공식에 비해 불완전한 퍼셀의 이론이 발전 경로였다는 이유 만으로 필요 불가결한 지식이라고는 생각이 들지 않는다. 퍼셀 이후 후대에 도입된 이론들이 보다 정제된 형태로 지식을 전달하고 있고 그것들만 공부하여도 앞선 이론들이

겉어온 혼돈스런 길을 다시 걸을 필요 없이 보다 포괄적이고 선명한 지식을 얻을 수 있다고 보기 때문이다. 이론 발전의 배경을 살펴보는 것은 물리 이론 발전의 방향성을 경험할 수 있고 물리 이론의 철학적 근원에 대해 생각할 수 있는 기회이기에 중요하기는 하지만, 이 책에서는 나의 한계로 인하여 주변 지식을 어디까지 얼마나 자세히 돌이켜 볼 것 인가에는 결국 어느 정도 제한을 둘 수 밖에 없을 것이다. 퍼셀의 공식의 경우에는 그 결과만을 소개하기로 하겠다.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p$$

이 공식이 가장 일반적으로 알려진 특수상대론을 기반으로 분석한 등속 운동하는 전하에 의한 장이다. 물론 개별 상황에 더해서는 이런 공식 외에도 추측할 수 있는 혹은 사고 실험으로 검증하는 방법은 존재한다. 퍼셀의 공식이 그 결론을 표현하는 간단한 방법이므로 빌려서 사용할 뿐이다. 당시의 문제는 이 공식은 전기장에 대한 특수상대론 적인 분석으로 도출되었을 뿐 이것을 맥스웰 방정식 기반으로 구하는 구체적인 방법이 알려지지 않았었다는 것이고, 이 공식은 또한 등속 직선 운동이라는 비교적 간단한 상황 만을 다룰 수 있지 임의의 운동을 다룰 수는 없다는 점이다. 이 공식의 유효까지는 다루지 않겠지만 이 공식에 내포된 전기장 공식이 반드시 지켜야 하는 상대론과 모순이 없기 위한 등속 직선 운동하는 전하에 의한 전기장에 요구되는 최소한의 조건에 대해서 정도 만은 간단히 다루고 넘어 가기로 한다.

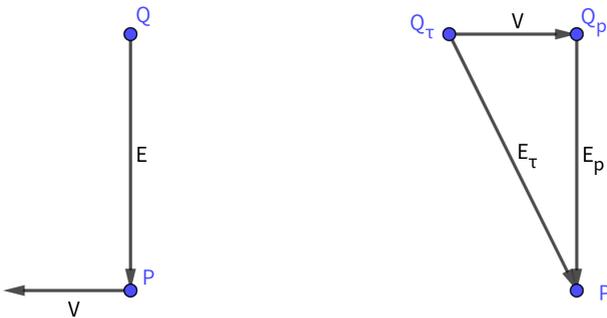


Figure 74: 상대적인 관점

먼저 정지한 전하 Q옆을 P점에서 v의 속도로 등속으로 지나가며 전기

장 E를 관찰하는 상황을 고려해보기로 한다.

P점을 지나는 입장에서 느끼는 전기장은 Q방향을 향하고 있다는 것은 고전 전기역학의 결론이다. 그런데 이를 상대론적으로 다시 살펴보면 그 관점에서는 P점의 관찰자는 정지해있고, 전하 Q가 v의 등속도로 운동하며 과거인 Q_T 위치에서 만들어낸 전기장인 E_T 를 느끼는 것이다. 그런데 그 움직이는 원천에 의한 전기장이 정지한 원천에 의한 전기장과 같다면 그것을 느껴서 얻는 Q의 위치는 과거의 위치인 Q_T 가 되어 현재의 위치인 Q_p 와는 다르게 된다. 또한 그렇게 본다면 그 Q_T 위치는 P가 움직인다고 볼 경우에는 빛의 광행차 현상을 통해 P가 보는 Q의 위치로서, P는 자신이 움직일 때는 Q의 실제 위치를 빛으로는 못 보다가 Q가 움직일 때는 빛을 통해보는 Q의 위치와 전기장으로 감지하는 Q의 위치가 같아지는, 상대론을 부정하는 현상이 생기게 된다. 따라서 이는 옳을 수가 없으므로 수정되어야 한다. 상대론이 이 경우에도 옳기 위해서는 P가 정지해 있고 Q가 등속도로 움직일 경우에도 P가 움직일 경우와 마찬가지로 빛으로는 Q의 잘못된 위치를 보면서 전기장은 Q의 진짜 위치를 느끼게 되는 어떤 과정이 존재해야만 한다. 한편 빛으로 관측하는 Q의 위치는 P가 움직이거나 Q가 움직이거나 둘 다 Q의 실제 현재 위치를 반영하지 못함은 Q가 움직일 경우에는 광속의 유한함으로 인해, P가 움직일 경우에는 광행차 현상의 존재로 인해 확인할 수 있다. 이러한 Q_T 에서 근원한 전기장 E_T 는 전하의 실제 위치 Q_p 를 반영하는 E_p 처럼 보여야 한다는 가정 하에서 길이 수축과 시간 팽창 효과 등을 고려하여 그 방향 별 강도를 계산한 것이 퍼셀의 공식이다.

앞 문장에서 측정이라 하지 않고 느낀다고 표현한 것에는 조금 복잡한 이유가 있다. 앞서 언급한 바 있는 제 3의 관점에서의 측정이나 관측을 P 입장에서 느낀다고 표현하였다. 왜냐하면 P 입장에서 장의 측정을 통해 Q 위치를 측정하여 그 방향으로 빛을 쏘다면 그 빛 또한 Q_p 를 맞추지 못하고, P가 움직인다면 도플러 분사출 효과에 의하여, Q가 움직인다면 그 빛이 도달하기 전에 Q가 이동함에 의하여 빛나가게 되기 때문이다. 사실은 애초에 P의 운동과 Q의 운동을 구분한 것 부터가 이미 제 3의 관점을 도입한 표현이다. 제 3의 관점에서 장에 의한 P의 운동변화의 초점이 어떤 경우이건 정확히 Q_p 를 향하게 되는 것을 느낀다고 표현 하였다. 이 경우도 '자기장의 영향은 제외하고' 라는 단서는 붙는다.

앞의 조건을 파인만의 공식이 만족 시키는 지를 가속도가 존재하지 않는 등속 운동의 경우를 통해 확인해보면,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{r}{c}\right)^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{r}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1 + \frac{r}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right) \\ &= \frac{q \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{r}{c}\right)^3} \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{v}}{c} \right)\end{aligned}$$

이고, 이는 퍼셀의 공식과 일치함을 간단히 보일 수 있다.

일핏 식이 달라 보이지만 퍼셀 공식의 r_p 는 전하의 현재 방향과 거리를 나타내는 벡터이고 파인만 공식의 r 혹은 r_τ 는 전하의 과거 방향과 거리를 나타내는 벡터란 것만 주목하면 두 공식에 따른 전기장의 방향이 같다는 정도는 다음 그림으로 알 수 있다.

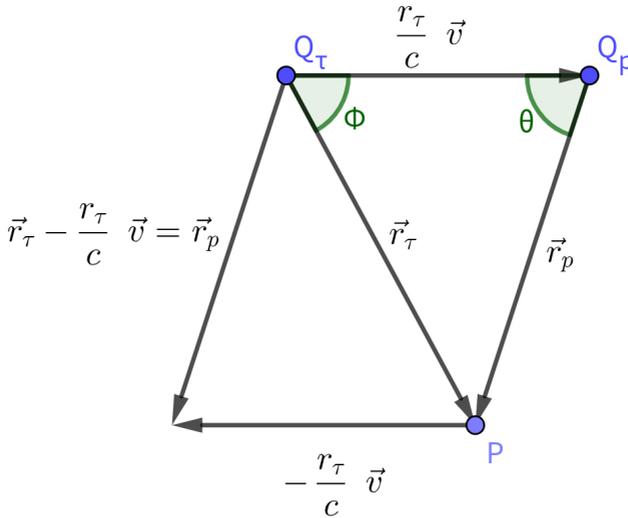


Figure 75: 퍼셀 공식과의 비교

퍼셀 공식의 \vec{r}_p 는 전하 Q의 현재 위치로부터 관측 지점 P로의 벡터를 말하는 것인데 이는 파인만 공식에서 $a=0$ 일 경우인 $\vec{r}_\tau - \frac{r_\tau}{c}\vec{v}$ 와 동일한 방향임을 한눈에 알 수 있다. 다만 그 크기는 추가 계산으로 확인해 보아야 하나 개념적으로 독립된 계산에서 동일한 방향을 가진 벡터가 구해졌는데 그 전체 크기는 다르기란 매우 어려운 경우란 것 정도는 따로 계산 없이도 짐작할 수 있는 일이다.

퍼셀의 공식 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p$ 과 파인만의 공식

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{r}{c}\right)^2} \left(\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) (\hat{r} - \frac{\vec{v}}{c})}{1 + \frac{r}{c}} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)$$

이 가속도 $a=0$ 일 때 같은 식임을 비교하기 위해서는 약간의 사전 준비가 필요하다.

퍼셀 공식과의 비교 그림을 통하여, $r_\tau \sin \phi = r_p \sin \theta \rightarrow \frac{r_p}{r} = \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$ 을 확인 할 수 있다. 그리고, $r_\tau \cos \phi + r_p \cos \theta = r_\tau \frac{v}{c} \rightarrow \frac{r_p}{r} = \frac{\beta - \cos \phi}{\cos \theta}$ 또한 확인할 수 있다.

이로부터 방정식 $\frac{\sin \phi}{\sin \theta} = \frac{\beta - \cos \phi}{\cos \theta} \rightarrow \frac{\sin \phi}{\beta - \cos \phi} = \tan \theta \rightarrow \theta = \arctan \frac{\sin \phi}{\beta - \cos \phi}$ 을 풀어 θ 의 표현을 구할 수 있다.

그리고, $\sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ 인 규칙 정도는 상기해 두는 것이 좋을 것이다.

이 규칙들을 다음의 등식들에 적용하여 참인지 확인해 본다.

$$\begin{aligned} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{r}{c}\right)^2} \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{r}{c}} \hat{r} - \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{r}{c}} \frac{\vec{v}}{c} \right) \\ \frac{\hat{r}_p}{r_p^2 (1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} &= \frac{\hat{r} - \frac{\vec{v}}{c}}{r^2 \left(1 + \frac{r}{c}\right)^3} \\ \frac{r \left(\hat{r} - \frac{\vec{v}}{c}\right)}{r_p^2 (1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} &= \frac{\hat{r} - \frac{\vec{v}}{c}}{r^2 \left(1 + \frac{r}{c}\right)^3} \\ \frac{1}{r_p^3 (1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} &= \frac{1}{r^3 \left(1 + \frac{r}{c}\right)^3} \\ r \left(1 + \frac{r}{c}\right) &= r_p (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \\ r \left(1 - \frac{v}{c} \cos \phi\right) &= r_p \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}} &= \frac{r_p}{r} \\ \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}} &= \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \\ \frac{1 + \beta^2 \cos^2 \phi - 2\beta \cos \phi}{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \theta} \\ \frac{1 + \beta^2 \cos^2 \phi - 2\beta \cos \phi}{\sin^2 \phi} &= \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ \frac{1 + \beta^2 \cos^2 \phi - 2\beta \cos \phi}{\sin^2 \phi} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \beta^2 \\ \frac{1 + \beta^2 \cos^2 \phi - 2\beta \cos \phi + \beta^2 \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi} &= \frac{\left(\frac{\sin \phi}{\beta - \cos \phi}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\sin \phi}{\beta - \cos \phi}\right)^2} \\ \frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \phi}{\sin^2 \phi} &= \frac{\beta^2 + \cos^2 \phi - 2\beta \cos \phi + 1}{\sin^2 \phi} \\ \frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \phi}{\sin^2 \phi} &= \frac{\beta^2 + \cos^2 \phi - 2\beta \cos \phi}{\sin^2 \phi} + 1 \\ &= \frac{\beta^2 + 1 - 2\beta \cos \phi}{\sin^2 \phi} \end{aligned}$$

파인만의 공식은 퍼셀의 공식과 가속도가 없는 경우에는 일치함을 알 수 있다.

반면에 파인만 공식 유도에서 사용한 미분 연산자의 변형 기법을 사용하지 않은 계산을 최대한 엄격하게 해보면

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left(\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \frac{\vec{r}'}{r} - \left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)$$

로서, 전기장에 대한 대표적인 상대론 적 해석인 퍼셀의 공식과 일치할 수 없음을 즉각 알 수 있다. 일단 전기장의 방향이 등속 운동하는 전하의 현재 위치를 가리키지도 않는다. 하지만 시공간을 비트는 수학이 등장한 이후로는 이것 만으로는 이 방식의 가능성을 포기하기 보다는 뭔가 시공간을 뒤돌아보려는 시도를 해보는 사람도 많을 것이다. 그에 반해 이 공식을 완전히 버리고 미분 연산자의 정의를 손대는 것을 시도한 파인만의 발상은 쉬운 것인지, 아니면 여기서 간략히 소개한 것보다 훨씬 많은 다양한 시도 끝에 어렵게 생각해낸 기발한 생각인 것인지, 나로서는 1940년대 전자기학의 분위기를 정확히 느낄 수는 없으니 파인만의 발상의 난이도를 짐작하기는 어렵지만 나로서는 아무리 생각해도 쉬운 발상은 아니다. 하지만 발상이 어려울 뿐 그 실행은 그다지 어렵지 않다.

앞서, $\nabla r = \dot{r}' \nabla t = \frac{\dot{r}'}{\dot{r}} \frac{\vec{r}'}{r}$ 로 ∇r 을 표현할 수 있다는 것까지는 보였었다. 이 식이 정지 상태에서는 이대로 이면서 움직일 때에는 유한한 광속이라는 조건 때문에 값이 변하게 하는 변형은 어떤 것이 가능할 지를 보려고만 하면 즉각 보이는 후보가 하나 있다. 바로 최종 식의 항상 1이 되는 $\frac{\dot{r}'}{\dot{r}}$ 에서 분모의 \dot{r} 틀에서의 표현을 τ 에서의 표현으로 바꾼 $\nabla r = \frac{\dot{r}'}{\dot{\tau}} \frac{\vec{r}'}{r}$ 이다. 이것이 유한한 광속에 의하여 달라지는 \dot{r} 틀과 τ 틀의 특성을 직접 대입해서 필요한 효과를 만들어 내는 방법이며, 사실상 올바른 변형은 이것 뿐이라는 것은 한눈에 볼 수 있는 것이다. 유도 방법이라 할 것도 없다. ∇ 의 정의가 유한한 광속이라는 이 우주의 특성에 의해 영향을 받을 수 있는 것이 라면 그 영향이 어떤 것이어야 하는지는 명약관화 하다. 그리고, 이 정의를 도입한 것 만으로 퍼셀의 공식과 일치하는 식이 단숨에 계산되는 것이다.

그러나, 이 방식은 수학적으로 정당한 것은 아니다. 이 방식으로 재정의한 ∇ 은 앞서 미분의 순서에 무관한 미분 연산자의 특성을 잃어 버리는 것을 확인하였고, 이는 물리 현상에 사용되는 ∇ 이 더 이상 정상적인 미분 연산자가 아님을 의미한다는 것을 지적하였다. 미분 연산자를 미분 연산자가 아닌 것으로 변화 시켜버리는 조작이 수학적으로 정당할 수는 없으리라. \dot{r} 틀에서 간단히 물리적으로 올바른 공식이 얻어진 최초의 유도는

우연이라고 보아야 한다. 실은 우연은 아니고 파인만이 γ 를 기준으로 사용했기에 생각 없이 따라한 것 뿐이다. 하지만, 수학적으로 동등해야 할 τ 들에서 계산하는 방식은 다른 결과를 내어 버린다. 내가 제시한 τ 들에서 직접 계산하는 방식도 각 변환의 중간 단계에서 일단 γ 들로 변환했다가 다시 되돌리는 방식으로 계산한 것이다. 여기서 알 수 있는 것은 ∇ 연산자는 γ 들에서만 마치 진짜 미분 연산자인 것처럼 작동하는 유사 미분 연산자라는 사실이다. 그리고, 추가하자면 적용되는 물리량도 r 에 직접 적용되는 것이 권장된다는 사실이다. 이런 것은 아무리 보아도 처음 보는 성질의 수학이다. 그리고 이것이 전부 아니다.

그동안 전기장만 논하고 자기장에 대한 논의는 하지 않았었는데 원래 맥스웰 중력과 라플라스 문제를 논하기 위해 전자기장에 대한 논의까지 오게 된 것이라 자기장 쪽은 일단 우선적인 관심사가 아니었다. 그러나, 전기장의 유도에서 수학적인 이상 현상을 발견했으니 자기장 쪽 역시 확인해보아야 할 필요가 생겼다.

자기장은 벡터 퍼텐셜을 이용한 식으로 정의 된다.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \left(\frac{\vec{v}}{r(1+\frac{r}{c})} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \frac{\vec{v}}{r}\end{aligned}$$

또한 전자기 유도의 법칙에 따르면 이동하는 관측자 P에 대해서는

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{v}$$

이기도 하다. 또한 자기장에 관한 최초의 식인 비오-사바르의 법칙을 단일 전하에 관해 정리하면,

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

이기도 하다. 비오-사바르의 법칙과 전자기유도 법칙에서의 표현이 부호가 반대인 것은 관측자가 움직이고 있는가 혹은 전기장의 원천인 전하가 움직이고 있는가의 차이일 뿐이다. 여기에서는 물론 가장 범용으로 생각되는 첫 번째 접근법의 풀이를 구하려 한다. 다른 식들은 비교 검증의 용도이다. 비오-사바르의 법칙은 상대론을 통해 보정할 필요가 있는 느린 속도에서의 근사 식이고, 전자기 유도 법칙은 자기장 측면에서는 근사 식이 아닌 상대론적으로도 엄밀한 법칙이지만, 그 전자기 유도 법칙에 사용되는 E는 퍼셀의

공식 같은 상대론 적인 보정을 해야 하기 때문이다. 반면 직접 맥스웰 방정식을 풀어서 얻게 되는 첫 번째 방식은 퍼셀이 수행하였던 물리적인 직관을 통한 방법으로 할 때 필요했던 복잡하고 애매한 상대론 적인 보정이 필요 없고, 덤으로 등속 운동에 국한되지도 않은 일반적인 운동에 관한 식을 얻게 된다.

한편, 퍼셀의 공식과 움직이는 전하가 만들어내는 자기장을 정지한 관측자가 측정하는 상황을 정지한 전하가 만들어낸 전기장을 움직이는 관측자가 측정하며 자기장을 느끼는 상황으로 변형하는 등의 상대론 적인 보정을 통하여 계산한 결과로서 자기장은 다음과 같은 표현으로도 쓸 수 있음이 알려졌던 것이 파인만 공식이 계산된 것으로 알려진 1950년 경까지의 상황 이었다.

$$\vec{B} = \frac{\hat{r}}{c} \times \vec{E}$$

여기에 사용되는 r 은 이미 친숙한 r_τ 이자 r' 이다. 그리고, E 는 r 과는 조금 방향이 어긋나있는 퍼셀의 공식이나 파인만의 공식으로 얻을 수 있는 E 이다. 이것은 이미 상대론 적으로 올바른 식이다. 다만 파인만 공식에서 포함된 가속도 a 의 영향은 고려되지 않은 계산이긴 했지만 미리 결과를 말하자면 가속도의 영향을 포함하여도 변하지 않는 식이다. 이것을 구하는 방법을 설명하려 한다.

우선 다음의 벡터대수 기본 공식이 필요하다.

$$\begin{aligned} \nabla \times (u\vec{v}) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uv_x & uv_y & uv_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial uv_z}{\partial y} - \frac{\partial uv_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial uv_x}{\partial z} - \frac{\partial uv_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial uv_y}{\partial x} - \frac{\partial uv_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \left(\frac{duv_z}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{duv_y}{dt} \frac{\partial t}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{duv_x}{dt} \frac{\partial t}{\partial z} - \frac{duv_z}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{duv_y}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{duv_x}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \left((ua_z + \dot{u}v_z) \frac{\partial t}{\partial y} - (ua_y + \dot{u}v_y) \frac{\partial t}{\partial z} \right) \hat{x} \\ &\quad + \left((ua_x + \dot{u}v_x) \frac{\partial t}{\partial z} - (ua_z + \dot{u}v_z) \frac{\partial t}{\partial x} \right) \hat{y} \\ &\quad + \left((ua_y + \dot{u}v_y) \frac{\partial t}{\partial x} - (ua_x + \dot{u}v_x) \frac{\partial t}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \left(ua_z \frac{\partial t}{\partial y} - ua_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(ua_x \frac{\partial t}{\partial z} - ua_z \frac{\partial t}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(ua_y \frac{\partial t}{\partial x} - ua_x \frac{\partial t}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &\quad + \left(\dot{u}v_z \frac{\partial t}{\partial y} - \dot{u}v_y \frac{\partial t}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\dot{u}v_x \frac{\partial t}{\partial z} - \dot{u}v_z \frac{\partial t}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\dot{u}v_y \frac{\partial t}{\partial x} - \dot{u}v_x \frac{\partial t}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= u \left(\left(a_z \frac{\partial t}{\partial y} - a_y \frac{\partial t}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(a_x \frac{\partial t}{\partial z} - a_z \frac{\partial t}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(a_y \frac{\partial t}{\partial x} - a_x \frac{\partial t}{\partial y} \right) \hat{z} \right) \\ &\quad + \left(v_z \frac{\partial u}{\partial y} - v_y \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(v_x \frac{\partial u}{\partial z} - v_z \frac{\partial u}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(v_y \frac{\partial u}{\partial x} - v_x \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= u \nabla \times \vec{v} - \vec{v} \times \nabla u \end{aligned}$$

구하는 방법까지 적은 것은 곧 자주 사용할 기법이라 익숙해지기를 바람이고, 여기까지는 수학적으로 정당한 방법임을 보이기 위해서 이다.

이를 이용하여, 일단 계산 과정부터 소개하면 다음과 같다. 결과부터 소개하는 것은 그 과정이 완전히 정당하지 못한 때의 어쩔 수 없는 선택으로 보면 올바를 것이다.

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \frac{\vec{v}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{r} \nabla \times \vec{v}' - \vec{v}' \times \nabla \frac{1}{r} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\nabla \times \vec{r}') + \vec{v}' \times \frac{\vec{r}'}{r^3} \left(1 - \frac{r'}{c} \right) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}'}{c} \times \frac{\vec{r}'}{r} \right) + \vec{v}' \times \frac{\vec{r}'}{r^3} \left(1 - \frac{r'}{c} \right) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{rc} \left(\vec{a}' \times \frac{\vec{r}'}{r} - \vec{v}' \times \frac{\vec{v}'}{r} - \vec{v}' \times \frac{r' \vec{r}'}{r^2} \right) + \vec{v}' \times \frac{\vec{r}'}{r^3} \left(1 - \frac{r'}{c} \right) \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{rc} \left(\vec{a}' - \vec{v}' \frac{r'}{r} \right) + \frac{\vec{v}'}{r^2} \left(1 - \frac{r'}{c} \right) \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\vec{a}'}{rc} - \frac{\vec{v}'}{r^2} \frac{r'}{c} + \frac{\vec{v}'}{r^2} - \frac{\vec{v}'}{r^2} \frac{r'}{c} \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \left(\frac{r \vec{a}'}{c^2} + \frac{\vec{v}'}{c} \left(1 - \frac{2r'}{c} \right) \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \left(\left(1 - 2 \frac{r'}{c} \right) \frac{\vec{v}'}{c} + \frac{r' \vec{a}'}{c^2} \right) \times \frac{\vec{r}'}{r}
 \end{aligned}$$

↑ 를 에서의

$$\vec{B} = \frac{\hat{r}}{c} \times \vec{E}$$

임을 볼 수 있다. 이를 τ틀로 옮기면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \left(\left(1 - 2 \frac{r'}{c} \right) \frac{\vec{v}'}{c} + \frac{r' \vec{a}'}{c^2} \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \left(\left(1 - 2 \frac{\frac{r'}{c}}{1 + \frac{r'}{c}} \right) \frac{\vec{v}'}{c} + \frac{r' \frac{1}{(1 + \frac{r'}{c})^2} \left(\vec{a}' - \frac{1}{1 + \frac{r'}{c}} \frac{r'}{c} \vec{v}' \right)}{c^2} \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \left(\left(1 - \frac{2 \frac{r'}{c}}{1 + \frac{r'}{c}} \right) \frac{\vec{v}'}{c} + r \frac{1}{c^2 (1 + \frac{r'}{c})^2} \left(\vec{a}' - \frac{1}{1 + \frac{r'}{c}} \frac{r'}{c} \vec{v}' \right) \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \left(\frac{1 - \frac{r'}{c}}{1 + \frac{r'}{c}} \frac{\vec{v}'}{c} + r \frac{1}{c^2 (1 + \frac{r'}{c})^2} \left(\vec{a}' - \frac{1}{1 + \frac{r'}{c}} \frac{r'}{c} \vec{v}' \right) \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{r'}{c})^2 c} \left(\left(1 - \frac{r'}{c} \right) \frac{\vec{v}'}{c} + \frac{r \vec{a}'}{c^2} - \frac{r r'}{c^2} \frac{\vec{v}'}{c} \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{r'}{c})^2 c} \left(\frac{1}{1 + \frac{r'}{c}} \left(1 - \frac{r'^2}{c^2} - \frac{r r'}{c^2} \right) \frac{\vec{v}'}{c} + \frac{r \vec{a}'}{c^2} \right) \times \frac{\vec{r}'}{r} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{r'}{c})^2 c} \left(\frac{1}{1 + \frac{r'}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}'}{c^2} \right) \frac{\vec{v}'}{c} + \frac{r \vec{a}'}{c^2} \right) \times \frac{\vec{r}'}{r}
 \end{aligned}$$

역시 마찬가지로 τ 틀에서의

$$\vec{B} = \frac{\hat{r}}{c} \times \vec{E}$$

로 정확히 변환 됨을 볼 수 있다.

이렇게 계산한 규칙은 다음과 같다.

먼저 앞서의 전기장 계산에서 ∇ 연산자는 더 이상 진짜 미분 연산자가 아니며 τ 틀에서는 더 이상 클레로의 규칙이 적용되지 않지만 ν 틀에서는 여전히 마치 진짜 미분 연산자 인 것처럼 작용한다는 것을 보았다. 그리고, 모든 관점의 틀에서 r 의 정의는 동일하므로, 속도나 가속도 등의 다른 정의가 도출되는 출발점으로 항상 r 을 쓰는 것이 안전하다는 것도 알 수 있었다. 그리고, 이 추측이 맞지 않다면 이 모든 계산은 애초부터 무의미하다.

그래서, ν 틀에서 r 기반으로 자기장을 계산 하였는데, 중간에 $\nabla \times \vec{r} = \frac{\vec{v}'}{c} \times \frac{\vec{r}}{r}$ 로 치환한 부분은 다음의 추측을 기반으로 한다.

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial r_z}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial r_x}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \left(\frac{dr_z}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} - \frac{dr_y}{dt} \frac{\partial t}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{dr_x}{dt} \frac{\partial t}{\partial z} - \frac{dr_z}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{dr_y}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{dr_x}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= - \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{dr_x}{dt} & \frac{dr_y}{dt} & \frac{dr_z}{dt} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-d\vec{r}}{dt} \times \nabla t \\ &= \vec{v}' \times \nabla t \\ &= \frac{\vec{v}'}{c} \times \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

그리고, $\nabla t = \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r}$ 이다. 여기서 묘한 추측이 하나 등장한다. 시간에 대한 ∇ 이 앞서의 ∇r 때의 $\nabla t = \frac{1}{r} \frac{\vec{r}}{r}$ 과도 같지 않다. 물론 앞서의 경우도 물리적인 직관에 의한 추측이었고 그렇게 하였던 근거란 그것이 가장 간단하고 그럴듯한 후보라는 것 말고는 없었지만, 그러한 추측의 일관성마저 허용되지 않는다는 결과이다. $\nabla t = \frac{1}{r} \frac{\vec{r}}{r}$ 은 전혀 사용할 수가 없다. 그것을 사용하면 위의 계산에 따르면 $\nabla \times r = \frac{\vec{v}'}{c} \times \frac{\vec{r}}{r}$ 라는 결과를 보이게 되는데 이 결과는 어떤 특정 조건에서 무한대가 등장하게 된다. 물리 공식에서 무한대가 등장한다면 그 무한대가 등장하는 조건이 실제로는 불가능한 조건이 아닌 한

파탄이라는 말에 다를 아니다. 광속보다 느린 가능한 범위 내에서 무한대가 등장하므로 이 공식은 전혀 고려 대상이 아니다.

한편, 원래 벡터 대수학의 정의에서는 $\nabla \times r = 0$ 이다. 그러나, 그 정의를 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 에 대입하면 그저 비오-사바르의 공식이 나올 뿐이다. 그러나 그 결과는 이미 $v \ll c$ 일 경우의 근사치 이고 엄밀할 수 없음을 퍼셀의 상대론적 해석 결과를 통해 이미 알고 있다. 따라서 $\nabla \times r = 0$ 일수는 없고 무언가 값을 가져야만 하는 것이 분명하다. 그리고 보니 자기장 계산 쪽에서 ∇ 연산의 수학적 정의를 변형해야만 한다는 물리적인 이유가 보다 분명하게 등장하고 있다. 변형은 필연적으로 해야 함을 알게 되었는데 어떻게 해야 할 것 인지를 ∇t 에 대하여 생각해 보면 조건은 간단하다. v 와의 벡터 곱을 구하는데 쓸 수 있는 다른 벡터는 애초에 r 벡터 뿐이고, 느린 속도에서는 0 이고 광속에 가까워지는 빠른 속도에서는 $\frac{\vec{r}}{r}$ 이 되는 조건이며 이는 간단히 만들 수 있다. 바로 $\nabla t = \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r}$ 이고, 이를 시험해보면 물리적으로는 올바른 계산이 되어버리는 수학적으로는 설명이 불가능한 위의 결과를 얻을 수 있다. 이것이 내가 파인만 공식을 재구성 해본 과정의 골자이다.

이 방식은 수학적으로 정당한가? 그럴리가 있겠는가. 수학적으로는 이 방식은 정당하지 않다. 수학적으로 미분 연산자로서 이미 결정된 ∇ 의 정의를 마치 ∇ 이 무슨 미지의 함수인 양 취급하여 재정의 해버렸는데, 그 결과는 ∇ 의 미분 연산자로서의 특징, 미분 연산자끼리는 연산 순서를 바꿀 수 있다는 특성이 어떤 틀에서는 유지되고 어떤 틀에서는 더 이상 유지되지 않는다는, 심지어 유지되는 경우도 된다고 보장되는 것이 아닌 된다고 믿고 계산해보니 올바른 결과가 나오더라는 수학적으로는 말이 되지 않는 이야기를 하고 있는 것이다.

그러나, 나는 수학적으로는 정당하지 않더라도 그 결과는 옳다고 본다. 결과물인 파인만 공식은 이미 전자기장을 상대론적으로 해석했을 때의 해답이 될 수 있음이 검증되었다. 물론 하지만 파인만 공식은 실험적으로는 아직 검증 되지 않았다. 이런 공식의 진위를 실험으로 판별하려면 개별 입자 하나를 상대론적 속도로 가속하는 정도로는 사실상 불가능하다. 실험 장치 자체를 상대론적 속도로 가속하거나 적어도 그 장을 직접 측정할 수 있을 정도의 많은 물질을 상대론적 속도로 가속해야 한다. 이는 결코 기술적으로 쉬운 일이 아니다. 21세기 들어서 최근 파인만 공식에 대한 실험을 이야기하는 논문은 발표된 것은 같지만 아직 결정적인 증거로 받아들여 지는 것은 아닌 것 같다. 정말 기발한 실험이 아니라면 현재 기술 수준으로 실험적으로 증명하기는 어려울 것이다. 아마 인류가 우주 공간에 거주할

정도로는 기술이 발달해야 직접 실험이 가능할 것으로 예견된다. 이 실험에 필요한 정도로 많은 물질을 지구상에서 광속에 가깝게 가속 시키다 실수하면 핵폭발 급 사고가 터지는 것이니 지구상에서 할 실험은 아니라고 본다.

그럼에도 파인만 공식이 옳다고 믿는 것은 퍼셀 공식등의 다른 상대론적 해석과의 일치 여부 정도를 제외하면 순전히 물리적 직감 때문이라고 밖에는 말할 수 없다.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left(\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \frac{\vec{r}'}{r} - \left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)$$

과

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \frac{\vec{r}'}{r} - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \frac{\vec{v}}{c} - \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)$$

중 후자를 선택하는 직감이란 것은 그 실체를 설명할 수는 없지만 분명 존재하는 것이다. 물리적 직감은 원래 수학보다도 먼저 존재해 왔다. 예컨대 1687년 발표된 만유인력의 법칙, 1785년에 발표된 쿨롱의 법칙, 1820년에 발표된 비오-사바르의 법칙 등은 모두 역 제곱의 법칙이라는 공통점이 있지만, 그 역 제곱의 법칙에 대해 수학적으로 퍼텐셜 개념을 도입하여 설명하는 것은 1837년에 해밀턴에 의해 도입된 ∇ 연산자의 등장 이후의 일이다. 물론 그 이전에 가우스나 라그랑지의 작업은 있었지만 퍼텐셜 장이라던가 파동의 개념까지는 아니었다.

역 제곱의 법칙은 수학적으로 유도된 것이 아니고, 직관적으로 역 제곱의 법칙을 추측하고 실제 현상에 적용하여 계산해본 것이 물리학의 출발이었던 것이다. 사실 지금도 완전한 설명은 존재하지 않고 그런 것은 영원히 존재할 수 없다. 왜 라는 질문은 무한 반복이 가능하지만 인간의 답하는 능력은 유한하기 때문이다. 어딘가에서 왜 라는 질문을 멈추는 것이 필요한데 그때 올바른 위치에서 멈추는 것이 중요하며 그 위치가 어디인지는 완벽히 설명할 수 없는 물리적 직관의 영역이라고 본다. 완벽히 설명할 수 있는 한계가 있다면 그 부분까지는 수학의 영역이다.

듣자 하니 이미 약 백 년 전에 러셀과 괴델에 의해 수학이 완벽할 수는 없음이 수학적으로 증명되었다고 한다. 그런 불완전함이 께국은 내재하고 있는 수학이 자연을 완벽히 설명할 수 있다면 그것이 오히려 이상한

것 아니겠는가. 자연이 완전하건 불완전하건 불완전한 서술 체계가 어떤 대상을 완전히 묘사할 수는 없는 것이다. 이 문제의 경우에 ∇t 라는 물리적으로는 그 정의가 모호한 실질적 의미가 있는지조차 의심되는 어떤 개념이 수학적 계산 시에 그 표현이 수학적으로 완전히 모순되지 않는 범위 내에서 물리적인 필요에 따라 그 형태를 바꾸어 가는 것, 그 결과가 어떤 관점에서는 여전히 미분 연산자로서 행동하고 다른 관점에서는 그 특성을 잃는 등의 현상을 나는 수학으로 물리학을 기술할 때 발생하는 수학 자체의 완벽하지 못함에 의해 발생한 수학의 한계라고 본다. 너무 성급한 판단일까? 전자기장의 근원적인 특성을 서술하는 문제이니 그런 수학적 한계가 존재한다면 등장할 수도 있을만한 사안 이기는 하다.

물리학은 분명 수학에 매우 무겁게 기대고 있는 학문이다. 수학은 물리학의 표현 수단이며 수학으로 표현되지 않는 것은 물리 법칙이 아니다. 그러나 물리학에서 진정 새로운 법칙을 찾는 탐색 과정에서는 수학보다는 물리적 직관이 더 작용하며, 그 표현은 비록 수학일 지라도 그 표현을 찾는 과정은 항상 수학 만은 아니다. 물리학은 수학에 매우 무겁게 기대고 있지만 수학 그 자체는 아니다. 자연은 분명 가능한 최대한 수학적이나 완벽하게 수학적이지는 않다. 애초에 수학이 완벽하지 않으니 이는 당연한 일이다.

그러나, 이것이 이 이야기의 끝은 아니다. 나는 파인만 공식의 본질을 수학의 한계와 마주한 물리 법칙의 사례로 보고 있으나, 정작 발견자인 파인만의 생각은 아마도 아닌 쪽에 가까울 수도 있다고 생각한다. 나처럼 생각했다면 불완전하나마 유도 과정을 밝혀 그 생각을 남기는데 주저할 이유가 없었는데 왜 인지 이런 중요한 공식의 유도 과정을 남기지 않았다. 사실 이런 기본 법칙에 있어서는 유도 과정보다는 그 결과가 중요한 것이니 괜히 분란을 일으키는 것이 귀찮았을 수도 있겠다 라는 생각은 든다. 그리고 어쩌면 수학의 불완전성 보다는 유도 과정의 불완전성으로 보고 잠시 발표를 미루고 보다 완전한 유도 방법을 찾았으나 결국 찾지 못한 것일 가능성도 있다. 물론 파인만의 생각을 알 수는 없다. / 틀에서 굳이 수식의 축약을 고집한 것을 보면 나와 비슷한 견해 같기도 하지만, 말없이 떠난 앞선 선인의 생각을 알 수는 없는 일이다. 하지만, 그리피스의 책에 보면 그리피스의 숨씨인지 아니면 파인만의 숨씨가 전해진 것인지 궁금한 현란한 수학적 재주가 하나 등장한다.

그리피스가 설명하는 대로 설명할 생각은 없다. 그것은 내가 보기엔 수학적 불완전함을 한 곳에 모아 슬쩍 가려버리는 기술이므로 그대로 설명해서야 그런 면모를 설명할 수는 없지 않겠는가. 따라서 나의 관점에서 정리해서 전할 일이니 이 문제에 대해 보다 확실히 판단하고자 한다면

그리피스의 책과 나의 앞으로의 설명을 비교해 보아야 할 것이다.

그리피스의 책에서는

$$\tau = t - \frac{r}{c} = t - t_r$$

에서 유래한 것처럼 보이는 t_r 을 도입하고 그것으로 앞서 설명한 ∇t 의 문제를 덮었다.

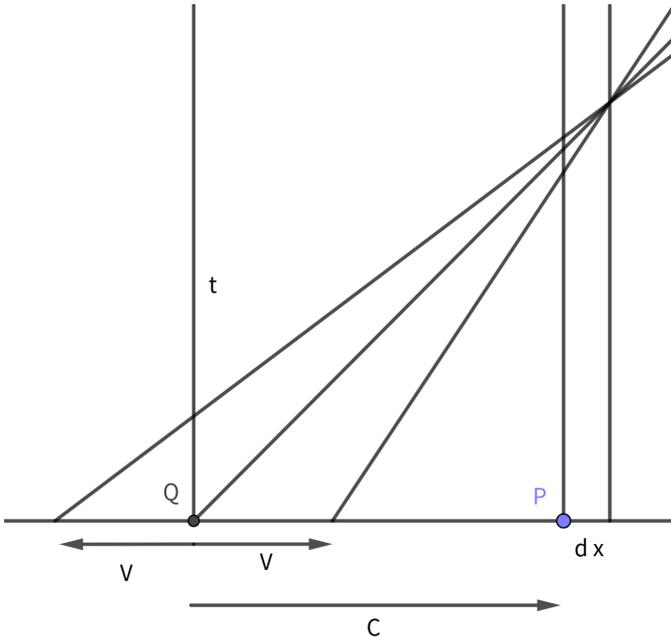


Figure 76: ∇r 의 정의

∇r 의 정의 그림을 보면, Q와 P의 거리에 대한 정보가 Q로부터 출발하여 광속으로 P에 전달되는 어떤 종류의 물리량이라고 가정하면, 그 물리량의 거리에 대한 기울기는 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 \pm \frac{v}{c}}$ 임을 알 수 있다. 이 y를 r로 대체하여 3차원에서의 벡터 미분으로 표현하면, $\nabla r = \frac{1}{1 \pm \frac{v}{c}} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{r}'}{\dot{r}} \frac{\vec{r}}{r}$ 이 되어 앞서 추측으로 구했던 ∇r 의 값에 대한 근거를 제시하였다. 여기 까지는 꽤 그럴듯한 해결로 보아도 될듯하다.

그리고, 이 정의들을 이용하여 $-c\nabla t_r = \nabla r$ 이라는 정의를 더한 다음, 이어서 $\dot{r}' = \frac{\dot{r}}{1+\frac{v}{c}}$ 을 이용하여,

$$\nabla t_r = \frac{-\vec{r}}{rc - \vec{r} \cdot \vec{v}} = \frac{-1}{c} \frac{\dot{r}' \vec{r}}{\dot{r}}$$

라는 정의를 유도 하였고, 또한 정의에 의해 $d\tau = dt - dt_r$ 이고, 무한소끼리의 덧셈인 경우 이므로 $dt = 0$ 임을 이용하여, $d\tau = -dt_r$ 이므로,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{r}' &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial r_z}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial r_x}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial r_y}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \left(\frac{dr_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dr_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{dr_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dr_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{dr_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dr_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= - \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{dr_x}{dt_r} & \frac{dr_y}{dt_r} & \frac{dr_z}{dt_r} \\ \frac{\partial t_r}{\partial x} & \frac{\partial t_r}{\partial y} & \frac{\partial t_r}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-d\vec{r}'}{dt_r} \times \nabla t_r \\ &= \frac{d\vec{r}'}{d\tau} \times \nabla t_r \\ &= -\vec{v} \times \frac{-1}{c} \frac{\dot{r}' \vec{r}}{\dot{r}} \\ &= \vec{v} \times \frac{1}{c} \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \frac{\vec{r}'}{r} \\ &= \frac{\vec{v}'}{c} \times \frac{\vec{r}'}{r} \end{aligned}$$

이 되는 결과를 도출하여 사용하고 있다.

이 현란한 결과를 통하여 앞서의 부족했던 수학적 근거가 완전히 해결 되었는가? 나는 미심쩍다고 본다. ∇ 연산이 이 변환 이후에도 여전히 온전한 미분 연산자로서 작용한다면 이 방식이 정당할 가능성도 있지만 / 틀에서만 온전한 미분 연산자이므로 변형 이후에 마치 아무 일도 없었던 것처럼 일반적인 미분 연산자인 듯 계산해버린 미심쩍음은 어떠한 그럴듯해 보이는 계산으로 가려도 해소되지 않는다고 본다. 그럴듯해 보이는 계산 만으로 라마누잔 합도 가능한 것이 수학이다. 그러나, 두 가지 다른 방식으로 표현되던 ∇t 를 하나로 묶었고, 그를 이용한 유도에서 불완전성을 슬쩍 가려버린 교묘함은 구경할만한 현란한 솜씨임에는 분명하다. 그러나, 나는 직접 측정이 불가능한 물리량을 가정한 점과 무한소끼리의 합에서만 성립하는 논리를 이용했다는 점에서 여전히 불완전함이 완전히 해소된 것은 아니라고 본다. 그리고 나는 불완전성이 존재한다면 그것을 교묘히 감추기 보다는 투박하게 드러내는 방식을 선호한다. 보기 안좋다고 자꾸

감추다 보면 나중에는 그런 불완전성이 존재했었다는 사실을 다음 세대에선, 어쩌면 본인도 며칠 후면 잊어버릴 수 있는데 그건 퇴보라고 본다. 현대 물리학의 근원적인 문제가 그런 지나치게 정교한 수학을 구사하려 한 데에 있지 않을까 생각한다. 사족으로 나는 그리피스 책의 대부분의 풀이 과정을 직접 제시하지 않고 독자에게 연습 문제로 떠넘겨버리는 서술 방식이 마음에 들지 않는다. 이런 중요한 문제에서 직접 풀이를 보이지 않는 것은 근거가 빈약할 때 힌트만 제공하고 그 세부 풀이를 떠넘겨 일단 그 풀이를 따라하는데 성공한 사람은 애초의 빈약한 근거에도 그 풀이 과정의 비약을 공유해버린 것이 되어 결과를 옹호하는 감정이 생기는 것을 이용한 심리적인 트릭이라면 지나친 비약일까? 하기는 파인만 으로부터 30년 후의 책에서는 파인만 처럼 유도 과정은 아무것도 설명하지 않고 결과만을 전할 수는 없기는 하다. 뭐라도 유도 과정과 그 근거를 보여야만 한다는 압박은 있다. 유도 과정을 생략하고 결과만을 서술해도 되는 것은 최초 발견자인 파인만 만의 권리일 것이다. 그리고 유도 과정의 불완전성을 거의 해소한 것 또한 사실이다.

자, 기나긴 지루한 계산 과정을 통하여 움직이는 전하가 만들어내는 전기장을, 덤으로 자기장까지도, 어떻게 계산할 수 있는 지를 알게 되었다. 이제 이런 지루한 계산을 한 원래 이유인 라플라스 문제의 해결로 돌아가 볼 때이다.

5.5 라플라스 문제의 해결

앞서 쌍성계에서의 라플라스 문제를 좀 더 구체적으로 계산해보기로 한다. 편한 계산을 위해 정확한 원 궤도를 그리는 쌍성계를 이용하기로 한다.

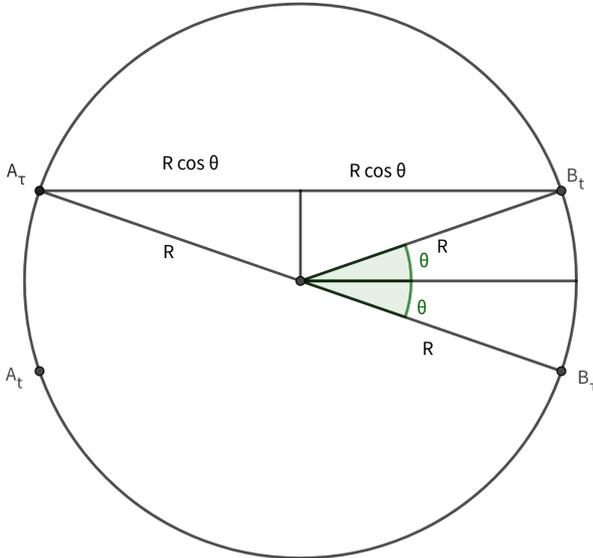


Figure 77: 쌍성계에서의 라플라스의 문제

A와 B라는 동일 질량의 항성으로 이루어진 쌍성계에서는 설혹 중력파 방출 같은 다른 교란 요인이 있다고 하더라도 두 별이 궤도 원의 중심을 대칭점으로 하여 서로 정확히 반대 위치에서 공전하고 있다고 보아도 무방할 것이다. 이때, 과거 시점인 τ 시에 출발한 A 항성의 중력이 현재인 t 시간에 B 항성에 도착한다면 그동안에 B는 B_τ 로부터 B_t 로 이동하게 된다. 이때 중력이 광속으로 전달된 거리는 $c \Delta t = 2R \cos \theta$ 라면 B가 이동한 거리는 $v \Delta t = 2R\theta$ 이다. 이로부터

$$\frac{\cos \theta}{c} = \frac{\theta}{v} \rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\theta}{\cos \theta}$$

임을 알 수 있다. c 는 상수이므로 어떤 v 가 주어졌을 때 θ 의 값을 구하는 방정식으로 쓸 수 있다.

이 방정식은 초월 함수인 코사인이 포함되어있는 함수로서 대수적으로 풀리지 않으므로 값을 구하기 위해서는 컴퓨터를 이용한 수치 계산을 하여야 한다. 특히 실제 지구의 궤도 속도나 질량 정도를 대입하려면 수치 계산의 정밀도가 일반적인 부동소수점으로는 부족하고 임의 정밀도 계산을 할 수 있어야 한다.

임의 정밀도 계산을 할 수 있는 프로그램은 여럿 공개되어 있으나 방정식의 수치 계산 해를 구할 수 있는 공개 패키지는 없으므로 직접 프로그래밍 할 필요가 있다. 파이썬의 mpmath라는 패키지가 findroot라는 해당 기능을 제공하는 하나 2022년 현재 부동소수점 입력 문제로 그 계산 값이 정확하지 않은 심각한 문제가 있으므로 파이썬으로는 검증하지 말기를 바란다. 모든 함수에 공통된 문제이며, 부동소수점 특성에 따른 어쩔 수 없는 문제라기엔 friCAS 등의 다른 수학 패키지 들은 해당 입력에 아무 문제 없다는 점에서 패키지의 문제임에 분명하다.

사용하려 하는 해당 패키지의 계산이 믿을 만 한지를 간단히 확인해보는 가장 쉬운 방법은 파이썬의 경우 `mp.asin(mp.sin(0.1))` 같은 명령을 입력해 보는 것이다. mpmath에서는 정확히 0.1 이 나오지 않고 부동소수점 정밀도 한계에서 부터 오차가 발생하기 시작하는 것을 볼 수 있다. 반면 제대로 된 패키지인 friCAS 등에서는 `asin(sin(0.1))` 입력의 답이 정확히 0.1이 나오는 것을 확인할 수 있다.

이 책에서 주로 사용하는 friCAS는 기본적으로 임의 정밀도 계산을 하고 있으나 근 찾기 함수는 없고, 자체 프로그래밍 기능이 내장되어 있지만 나는 불편하여 common lisp의 computable-reals 라는 1989년에 처음 발표되어 오랜 동안 검증된 신뢰할만한 패키지를 이용하여 그 계산 함수를 작성하였다. computable-reals 패키지에서는 arcsin 함수가 없고 arctan 함수만 있으므로 `[atan-r (sin-r 1/10 /r cos-r 1/10)]` 로 이상 없음을 확인해 볼 수 있다. computable-reals 에서는 부동소수점 입력을 아예 받지 않고 정수와 유리수 입력 만을 받는다.

이 책의 계산을 따라 해보고 있는 컴퓨터라면 앞서 우주의 모든 은하의 궤도 계산을 할 때 이미 설치했으므로 아래의 코드의 명령들만 한 번씩 실행해주면 된다. 첫 번째 것은 SHN 매크로에서 computable-reals 의 연산자들을 사용할 수 있도록 심볼테이블을 확장하여 재 정의하는 부분이고 두 번째 것이 주어진 v/c에서 라디안 단위의 θ 를 구하는 뉴턴 방식의 근 찾기 함수, 마지막 것은 그냥 재미로 뉴턴의 근 찾기 방법으로 근을 찾을

때 그 과정에 몇 번의 시도가 필요한지 궁금하다면 두 번째 함수 대신 사용해보기 바란다.

사용 상의 주의할 점은, 이 루틴의 작성 시 뉴턴의 근 찾기 알고리즘을 사용하였는데, 뉴턴의 근 찾기 알고리즘은 어떤 특정한 경우 근을 찾는 데 실패하고 무한 루프에 빠질 수 있다고 알려져 있다. 그런 경우 무한 루프에서 탈출할 대책을 마련해 두지 않은, 즉석에서 만들어 쓰는 계산 루틴 일 뿐이므로 이번 문제 같은 뉴턴의 근 찾기 알고리즘으로 반드시 근을 찾을 수 있음을 확신할 수 있는 경우에만 사용해야 한다.

다음의 프로그램들도 물론 [github\(https://github.com/kycgit/gsim\)](https://github.com/kycgit/gsim)에서 다운 받아서 사용할 수 있다.

```
(defparameter *symbol-table*
(list
'+ '(:s-type op :t-op + :arg-n 2)
'- '(:s-type op :t-op - :arg-n 2)
'* '(:s-type op :t-op * :arg-n 2)
'+r '(:s-type op :t-op +r :arg-n 2)
'-r '(:s-type op :t-op -r :arg-n 2)
'*r '(:s-type op :t-op *r :arg-n 2)
'× '(:s-type op :t-op × :arg-n 2)
'/ '(:s-type op :t-op / :arg-n 2)
'/r '(:s-type op :t-op /r :arg-n 2)
'÷ '(:s-type op :t-op ÷ :arg-n 2)
'< '(:s-type op :t-op < :arg-n 2)
'<= '(:s-type op :t-op <= :arg-n 2)
'> '(:s-type op :t-op > :arg-n 2)
'>= '(:s-type op :t-op >= :arg-n 2)
'=' '(:s-type op :t-op = :arg-n 2)
'/'= '(:s-type op :t-op /= :arg-n 2)
'0- '(:s-type op :t-op 0- :arg-n 1)
'1/ '(:s-type op :t-op 1/ :arg-n 1)
'√ '(:s-type op :t-op sqrt :arg-n 1)
'inDeg '(:s-type op :t-op deg :arg-n 1)
'toDeg '(:s-type op :t-op radToDeg :arg-n 1)
'e^ '(:s-type op :t-op exp :arg-n 1)
'^ '(:s-type op :t-op expt :arg-n 2)
'e^r '(:s-type op :t-op exp-r :arg-n 1)
'^r '(:s-type op :t-op expt-r :arg-n 2)
':ra '(:s-type op :t-op rational-approx-r :arg-n 2)
'ln '(:s-type op :t-op log :arg-n 1)
'log '(:s-type op :t-op log :arg-n 2)
'ln-r '(:s-type op :t-op log-r :arg-n 1)
```

```

'log-r '(:s-type op :t-op log-r :arg-n 2)))

(defun nroot (F &optional dg)
(labels ((sign (x) (multiple-value-bind (a b c) (raw-approx-r x) a b c)))
  (let ((pct *CREAL-TOLERANCE*)
        (gx 0)
        eps)
    (if dg nil (setq dg *print-prec*))
    (setq *creal-tolerance* [ceiling (10 ^ dg log 2)])
    (setq eps [1/2 /r (10 ^ dg)])
    (loop while (not (= 0 (sign (funcall f gx))))
      do (setq gx [eps *r 2 /r
                  (funcall(f gx -r eps) -r funcall(f gx +r eps)) *r
                  funcall(f gx) +r gx]))
    (setq *creal-tolerance* pct)
    gx)))

(defun nrootp (F &optional dg)
(labels ((sign (x) (multiple-value-bind (a b c) (raw-approx-r x) a b c)))
  (let ((pct *CREAL-TOLERANCE*)
        (gx 0)
        eps)
    (if dg nil (setq dg *print-prec*))
    (setq *creal-tolerance* [ceiling (10 ^ dg log 2)])
    (setq eps [1/2 /r (10 ^ dg)])
    (print (loop while (not (= 0 (sign (funcall f gx))))
      doing (setq gx [eps *r 2 /r
                      (funcall(f gx -r eps) -r funcall(f gx +r eps))
                      *r funcall(f gx) +r gx])
            collect gx))
    (setq *creal-tolerance* pct)
    gx)))

```

Figure 78: nroot.lisp

이를 다음과 같이 이용할 수 있다. 다운 받은 프로그램이 있는 디렉토리에서 common lisp(SBCL) 을 실행하여 다음 명령 들을 입력한다.

```

CL-USER> (eval-when (:compile-toplevel :load-toplevel :execute)
  (ql:quickload :computable-reals)
  (use-package :computable-reals))
To load "computable-reals":
  Load 1 ASDF system:
    computable-reals
; Loading "computable-reals"

```

```

T
CL-USER> (load "shnv1-1.lisp")
To load "trivial-arguments":
  Load 1 ASDF system:
    trivial-arguments
; Loading "trivial-arguments"

T
CL-USER> (load "nroot.lisp")
T
CL-USER> (setq *print-prec* 100)
100 (7 bits, #x64, #o144, #b1100100)
CL-USER> (nroot (lambda (x) [x /r cos-r x -r 1/100000]))
+0.000009999999999950000000005416666665915277777895696924583245698
30600796764914388791406617643427328713...
CL-USER>

```

먼저 구하고 싶은 총 정밀도를 지정한다. `computable-reals` 패키지는 근본 적으로 오차를 내포한 부동 소수점이 아닌 무한 정밀도 계산이 가능한 `computable real` 이라는 자체 수치 규칙을 사용하며, `*print-prec*` 변수 값은 유효숫자의 자리 수가 아닌 총 자리 수이다. 또한 입력 시 0.23 같은 소수점을 이용한 표현은 쓸 수 없고 정수나 분수만이 입력 가능하다. 0.23 은 23/100 이라고 입력 해야만 한다. 이는 일반적으로 사용되는 부동소수 점이라는 숫자 표현 규칙 자체에 내포된 오차 문제를 피하기 위함이니 어쩔 수 없다. 위 예에서의 1/100000 은 v/c 로서 0.00001을 입력 한 것이다. 그리고, π 값도 무한 정밀도로 사용하고 싶을 때에는 패키지에서 제공하는 이름을 사용해야 한다. 신뢰성 있는 무한 정밀도 계산 뿐만 아니라 지체된 평가 방식으로 유명한 하스켈이 등장하기도 전인 1989년에 이미 완전한 지연 평가(lazy evaluation)를 구현하며 등장하였고 이후 40년 이상 사용법 상의 변화 없이 그대로 유지된 신뢰성은 충분히 검증된 패키지 이므로 그 정도의 낮섬은 감수할 가치가 충분하다.

쌍성계에서 서로 느끼는 힘의 방향은 대칭적이라고 볼 수 있으므로 한쪽만 계산하면 된다. 그리고 실제 쌍성계는 거리에 따른 속도가 중력 상수와 질량에 의하여 결정되어 있지만 계산 시에는 꼭 그에 구애 받지 않아도 된다. 원 운동을 강제하는 가속도는 중력이 아닌 다른 원인으로 얼마 든지 가정할 수 있고 그 경우에도 중력이 유한한 속도로 전달 될 때 운동에 너지를 증가 시키는 등의 에너지 보존 법칙을 파탄 내는 결과가 등장하지 않아야 라플라스 문제는 해결되기 때문이다. 어떤 임의의 속도와 그에 따른 가속도에서도 항상 라플라스 문제가 해결됨을 보이면 그중 한 특정한 조건인 중력에 따른 속도와 가속도에서도 라플라스 문제는 해결된 것이다.

구체적인 수치 계산을 위하여 앞서 계산해 둔 파인만 공식의 풀어진 꼴

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \frac{\vec{v}}{c} - r \frac{\vec{a}}{c^2} \right)$$

을 그림으로 표시해보면 다음과 같다.

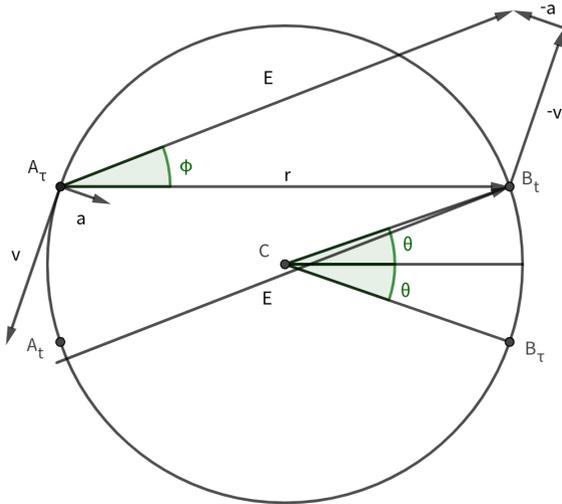


Figure 79: 쌍성계에서의 힘의 방향

쌍성계에서의 힘의 방향 그림의 해설 겸 계산 결과를 미리 말하자면, 한 별이 A_t, 다른 별이 B_t에 있을 때 A_t에서 발생한 장이 r경로로 B_t에서 B 별에 영향을 미치게 된다. 그 장은 r방향 성분에 A_t에서의 속도 v의 반대 방향과 A_t에서의 가속도 a의 반대 방향의 성분을 합한 E이며, 그 E는 B_t에서 느낄 때 원 궤도의 중심 혹은 A별의 현재 위치보다 살짝 더 미래인 방향을 가리키게 되며 이는 B별을 약간 감속시키는 방향이 된다.

그 힘의 방향이 A_t보다 과거라면 약간이라도 B별에 가속을 주는 성분이 있는 것이고 에너지 보존이 성립하지 않게 되어 라플라스 문제는 여전히 미

해결이다. 그리고, 힘의 방향은 정확히 궤도의 중심 혹은 At 방향을 가리킬 수는 없다. 앞서 계산했다시피 이 각도 계산에는 초월 함수인 삼각함수가 등장한다. 삼각함수에 의해 결정되는 중심 방향을 파인만 공식의 r, v, a 방향 벡터로 나타낼 수 있다면 이는 초월 함수를 대수함수로 나타낸 결과이다. 수학적으로 불가능하다.

남은 가능성은 하나다. 힘의 방향이 At보다 약간 미래를 향한다면 B별에게는 약간 저항력이 있는 것으로 느껴지게 되며 궤도 에너지가 감소하게 된다. 그런데, 궤도 에너지를 감소 시키는 또 다른 요인도 존재하고 있다. 바로 전자기파 복사나 중력파 복사이다. 이때 힘의 방향 변화에 따른 저항 성분이 파동 복사에 의한 저항보다 크다면, 역시 라플라스 문제는 파탄일 것이다. 그런데, 힘의 방향 변화에 따른 저항 성분에 의한 에너지 감소가 중력파 혹은 전자기파 복사로 잃는 양 보다는 작다면 그 결과는 둘 중 하나일 것이다. 하나는 힘의 방향에 따른 에너지 손실이 파동 복사에 의한 손실과 합쳐지거나 혹은 힘의 방향에 따른 에너지 손실은 파동 복사에 의한 에너지 손실에 가려지거나 이다. 합쳐진다면 여전히 에너지 보존 법칙은 깨어지게 된다. 그러므로 에너지 보존 법칙을 유지할 남은 가능성은 가려지는 것 하나만이 남게 된다.

어떤 에너지 손실이 다른 더 큰 손실에 의해 가려진다는 개념은 아직 물리학에 등장한 적은 없는 것으로 안다. 그러나, 초월 함수의 결과가 대수함수로 표현될 수 없는 한 전기장이나 중력에 의한 힘은 정확히 원 궤도의 중심을 향할 방법이 없고, 에너지를 증가 시키거나 소모 시킬 수 밖에 없다. 그런데, 증가 시킨다면 그것으로 이미 에너지 보존 법칙이 성립될 방법이 전혀 없으며, 소모 시킬 때에도 그것이 라모 공식으로 계산 되는 가속 운동에 따른 파동 복사로 인한 손실보다 크다면 그것을 무시할 방법은 없으며, 그런 식으로 소모된 에너지는 다른 아무런 일을 하지 않고 그냥 사라진 에너지가 되어버리므로 역시 에너지 보존 법칙을 성립하게 할 방법이 없다. 결국 남은 것은 그 저항에 의해 소모되는 에너지는 라모 공식에 따른 복사 에너지 보다 적고 거기에 포함된다고 억지로라도 끼워 맞추는 길이 유일하게 에너지 보존 법칙을 유지하는 방법이다. 그렇다면 장의 저항 성분에 의한 에너지 소모가 정말 가속도에 따른 장의 에너지 복사보다 적은지 직접 계산으로 확인해 보아야 할 것이다.

원 궤도에서 v 는 임의의 속도의 At에서의 원의 접선 벡터이며, 가속도 a 는 v 에 $\frac{v^2}{r}$ 형태로 종속된 값이며 그 방향은 At로부터 원의 중심 방향이다. 따라서 v 와 r 만 알면 At에서 발생하여 Bt에 영향을 미치는 힘과 방향을 계산할 수 있다. 방향을 정하기 위해 '쌍성계에서의 힘의 방향' 그림을

이용하여 성분 별로 구해보기로 한다.

자기장이나 앞서 찾은 로렌츠 힘의 추가 항은 원 운동에서는 정확히 원의 중심을 향하는 힘이므로 저항 성분이 없다 따라서 무시하기로 한다. 어차피 쌍성계를 유지 시키는 힘은 꼭 두 별 간의 힘이 아닌 물리적인 끈이라 던가 레일 같은 것도 상관 없으므로 실제 쌍성 운동을 정확히 묘사할 필요 또한 없다. 그리고, 해서도 안된다. 왜냐하면 실제로는 완전한 등속 원 운동 자체가 전자기파나 중력파 등의 에너지 복사로 인해 자체적으로 유지 불가능하고 외부에서 에너지를 가해서 유지 시켜줘야 하는 것이다. 그러므로, 이상적인 상황을 가정하고 불필요한 세부는 생략한 채 필요한 힘 만을 계산해보는 것은 완전히 정당하다.

우선 다음 몇 가지 계산은 미리 필요하다. 쌍성계에서의 힘의 방향 그림에 따르되 원 궤도의 반경은 r 방향과 구분하기 위해 R이라고 부르기로 한다.

$$r = 2R \cos \theta$$

$$a = \frac{v^2}{R}$$

$$\dot{r} = -\vec{v} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = v \sin \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = ar \cos \theta = \frac{v^2}{R} 2R \cos \theta \cos \theta = 2v^2 \cos^2 \theta$$

먼저 x와 y 방향 성분을 쌍성계에서의 힘의 방향 그림을 통하여 각각 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \frac{r}{r} + \frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \frac{v}{c} \sin \theta - \frac{ra}{c^2} \cos \theta \right) \\ &= \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta (1 + \frac{v \sin \theta}{c})^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2v^2 \cos^2 \theta}{c^2} \right) \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c} \right) - \frac{2R \cos \theta v^2}{c^2 R} \cos \theta \right) \\ &= \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta (1 + \frac{v \sin \theta}{c})^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 + \frac{\dot{r}}{c})^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\dot{r}}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \frac{v}{c} \cos \theta + \frac{ra}{c^2} \sin \theta \right) \\ &= \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta (1 + \frac{v \sin \theta}{c})^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2v^2 \cos^2 \theta}{c^2} \right) \frac{v}{c} \cos \theta + \frac{2R \cos \theta v^2}{c^2 R} \sin \theta \right) \\ &= \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta (1 + \frac{v \sin \theta}{c})^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2v^2 \cos^2 \theta}{c^2} + \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c} \right) 2 \frac{v}{c} \sin \theta \right) \frac{v}{c} \cos \theta \\ &= \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta (1 + \frac{v \sin \theta}{c})^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2v^2 \cos^2 \theta}{c^2} + 2 \frac{v}{c} \sin \theta + \frac{2v^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right) \frac{v}{c} \cos \theta \\ &= \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta (1 + \frac{v \sin \theta}{c})^3} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2 \frac{v}{c} \sin \theta \right) \frac{v}{c} \cos \theta \end{aligned}$$

최종으로 Bt에서의 장 벡터의 각도 ϕ 는

$$\tan \phi = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin \theta\right) \frac{v}{c} \cos \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c}\right)}$$

로부터 구할 수 있다.

이제, 어떤 쌍성계에서의 중심의 각도 θ 와 힘의 각도 ϕ 를 $v=9999c/10000$, $v=c/2$, $v=c/10$, $v=c/100$, $v=c/10000$, $v=c/100000000$ 에 대하여 각각 구해 보기로 한다.

먼저 Bt로부터 원의 중심으로의 각도 θ 들을 common-lisp 프로그램으로 구하면

```
CL-USER> (setq *print-prec* 80)
80 (7 bits, #x50, #o120, #b1010000)
CL-USER> (loop for i in '(9999/10000 1/2 1/10 1/100 1/10000 1/100000000)
            collect (nroot (lambda (x) [x /r cos-r x -r i])))
(+0.73904096992784149842009277295660292864014156922029485014732271354005563251691328...
+0.45018361129487357303653869676268182732013650172305543401505849136364156698522338...
+0.09950534268738783481577354784178622555720388755521667951546674750794365368371520...
+0.00999950005415915395676999236483420598404766815205808975034755223694284492461535...
+0.00009999999950000000541666659152777895696922610284151349517116771524125383468111...
+0.00000000999999999999999950000000000005416666666666591527777777777895696925...)
CL-USER>
```

이고, 이에 해당하는 힘의 각도 ϕ 들은

(67) - >digits(60)
28

Type: PositiveInteger

(68) -> $\theta_1 := 0.739040969927841498420092772956602928640141569220294850147323;$

$\text{atan} \left(\text{eval} \left(\frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin(\theta)\right) \frac{v}{c} \cos(\theta)}{\left(1 + \frac{v \sin(\theta)}{c}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, [c = 1, v = 9999/10000, \theta = \theta_1] \right) \right)$
1.5706610149_8042923033_7335987772_8195857613_5659890874_027294838
Type: Expression(Float)

(69) -> $\theta_2 := 0.450183611294873573036538696762681827320136501723055434015058;$

$\text{atan} \left(\text{eval} \left(\frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin(\theta)\right) \frac{v}{c} \cos(\theta)}{\left(1 + \frac{v \sin(\theta)}{c}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, [c = 1, v = 1/2, \theta = \theta_2] \right) \right)$
0.6932110578_6567610228_0660508401_7288222560_3358879742_4039714387
Type: Expression(Float)

(70) -> $\theta_3 := 0.099505342687387834815773547841786225557203887555216679515466;$

5.6 궤도 에너지 손실과 파동의 복사

앞서 힘의 방향을 구하기 위하여 움직이는 A를 원천으로 하는 장의 xy 성분별 강도를 구하였었다. 이는 장의 온전한 강도와 방향을 xy 좌표계에서 계산한 것이다.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \\ &= \frac{q}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c}\right)^2} \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{x} + \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin \theta\right) \frac{v}{c} \cos \theta\right) \hat{y} \right)\end{aligned}$$

이 장은 중심을 향하는 성분과 그 수직 성분으로도 나타낼 수 있다. 수직 성분의 방향은 B에서의 B의 움직이는 방향과 반대 방향으로 저항력이 된다.

$$\vec{E} = E_R \hat{R} + E_\theta \hat{\theta} = |\vec{E}| \cos(\varphi - \theta) \hat{R} + |\vec{E}| \sin(\varphi - \theta) \hat{\theta}$$

이로부터 B별의 궤도 운동 시 저항 성분의 크기는

$$|\vec{E}| \sin(\varphi - \theta) = \frac{q \sin(\varphi - \theta)}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c}\right)^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin \theta\right) \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2}$$

이다. 쌍성계 문제에 적용 할 것이므로 A와 B별의 속도의 크기 v는 동일하고 q는 동일하다고 가정할 때, 매 순간 에너지 손실은 여기에 q와 v를 한번 씩 더 곱해주면 족하다.

$$\frac{q^2 v \sin(\varphi - \theta)}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c}\right)^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin \theta\right) \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2}$$

이를 원 운동 시의 라모의 공식

$$\frac{a^2 q^2 \gamma^6}{6c^3 \pi \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right) = \frac{a^2 q^2 \gamma^6}{6c^3 \pi \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} (\hat{a} \times \hat{v})^2\right) = \frac{a^2 q^2 \gamma^6}{6c^3 \pi \epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{a^2 q^2 \gamma^4}{6c^3 \pi \epsilon_0}$$

과 비교할 것인데 어차피 전자기력에서의 정확한 값을 구하려는 목적 보다는 지체된 퍼텐셜 이론에 따른 전자기력이나 중력에서의 저항력 항에 의한 손실이 쌍성계라는 가장 큰 경우에도 그 파동의 복사에 가려질 것 인가를 확인하기 위해 두 값의 크기를 비교하고자 하는 것이 관심사이니 두 식에서 공통된 사항은 최대한 삭제한 후 크기만 비교해 보기로 한다.

$$\frac{q^2 v \sin(\varphi - \theta)}{16\pi\epsilon_0 R^2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c}\right)^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin \theta\right) \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} : \frac{a^2 q^2 \gamma^4}{6c^3 \pi \epsilon_0}$$

$$\frac{v \sin(\varphi - \theta)}{16R^2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c}\right)^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin \theta\right) \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} : \frac{\gamma^4 v^4}{6c^3 R^2}$$

$$\frac{\sin(\varphi - \theta)}{8 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{v \sin \theta}{c}\right)^2} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{v \sin \theta}{c}} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin \theta\right) \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} : \frac{v^3}{3c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

위 식을 이용하여 두 값들을 여러 다른 속도에서 비교 해보기로 한다.
먼저 식들을 변수들에 입력해준다.

(70) - > digits(60);

$$D\theta := \text{atan} \left(\frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin(\theta)\right) \frac{v}{c} \cos(\theta)}{\left(1 + \frac{v \sin(\theta)}{c}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right) - \theta;$$

$$Ex := 1 - \frac{v^2}{c^2};$$

$$Ey := \frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v}{c} \sin(\theta)\right) \frac{v}{c} \cos(\theta)}{1 + \frac{v \sin(\theta)}{c}};$$

Type: Expression(Integer) 앞서 입력한 공식들에 실제 값들을 대입하여 에너지 손실률을 계산한다.

- θ_i 들은 앞서 lisp 프로그램으로 구한 v_i 에 대한 값들이다.
- fr 은 지체된 장의 식으로 계산된 힘 중 중심력을 제외한 힘인 저항력으로 인한 궤도 운동 에너지 손실률이다.
- rr 은 라모 공식으로 계산된 전자기파/중력파 복사로 인한 에너지 손실률이다.

마지막에 fr/rr 을 계산하여 두 손실률의 크기를 비교한다. 이 값이 1을 넘지 않는 것으로 파동 복사의 항이 지체된 퍼텐셜 이론에 따른 저항력의 항을 가려버리는 것을 확인할 수 있다.

```
(71) - >vi := 0.9999;
      θi := 0.739040969927841498420092772956602928640141569220294850147323;
      fr := eval  $\left( \frac{\sin(D\theta)}{8 \cos(\theta)^2 \left(1 + \frac{v}{c} \sin(\theta)\right)^2} \sqrt{Ex^2 + Ey^2}, [c = 1, v = vi, \theta = \theta i] \right)$ ;
      rr := eval  $\left( \frac{v^3}{3c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, [c = 1, v = vi] \right)$ ;
      print (fr), print (rr), print (fr / rr)
0.0892399649_9479155013_2068787228_8956260953_4052218224_9655564873_8
8331666.7291687500_5208333320_3111978190_0390584307_4542854622_508
0.1071093790_6621598234_4131331874_3801346668_3445450804_4894916308 E -7
```

LISP output:

()

Type: Tuple(Void)

```
(72) - >vi := 0.5;
      θi := 0.4501836112948735730365386967626818273201365017230554340150583;
      fr := eval  $\left( \frac{\sin(D\theta)}{8 \cos(\theta)^2 \left(1 + \frac{v}{c} \sin(\theta)\right)^2} \sqrt{Ex^2 + Ey^2}, [c = 1, v = vi, \theta = \theta i] \right)$ ;
      rr := eval  $\left( \frac{v^3}{3c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, [c = 1, v = vi] \right)$ ;
      print (fr), print (rr), print (fr / rr)
0.0244051180_7920067373_6001260480_2983665554_7662164751_6962118644_2
0.0740740740_7407407407_4074074074_0740740740_7407407407_4074074074
0.3294690940_6920909543_6017016484_0279484989_3439224147_8988601697
```

LISP output:

()

Type: Tuple(Void)

```
(73) - >vi := 0.1;
      θi := 0.099505342687387834815773547841786225557203887555216679515466;
      fr := eval  $\left( \frac{\sin(D\theta)}{8 \cos(\theta)^2 \left(1 + \frac{v}{c} \sin(\theta)\right)^2} \sqrt{Ex^2 + Ey^2}, [c = 1, v = vi, \theta = \theta i] \right)$ ;
      rr := eval  $\left( \frac{v^3}{3c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, [c = 1, v = vi] \right)$ ;
      print (fr), print (rr), print (fr / rr)
0.0003242459_9695416441_8468171497_7894890778_8117225895_4766710373_687
0.0003401013_5020236030_3370404380_5053906064_0070741080_8420909431_011
0.9533805048_4432963962_1964654950_4347356940_1079300470_0558511753
```

LISP output:

()

Type: Tuple(Void)

속도가 광속에 비견될 정도로 빠를 때에는 파동 복사에 의한 손실이 압도적으로 크다. 그러나 그 차이는 급격히 줄기 시작하여 광속의 절반 부근에서는 같은 단위 정도로 차이가 줄어들고, 속도가 느려질수록, 0.1c 부근부터는 두 값이 매우 비슷해 지는 것을 볼 수 있다. 그러면서도 파동 복사에 의한 에너지 손실이 항상 미세하게 크다.

놀라운 결과 이다. 관련이 없는 우연이라기엔 너무도 잘 일치한다. 관련이 있다기엔 초월 함수의 계산 결과와 대수 함수의 계산 결과의 비교로서 유한한 다항식으로는 그 관련을 표현할 수 없다. 파동 복사에 의한 손실이 저항력에 의한 손실항을 덮고 있으리라는 예상은 미리 하고 시작한 계산이지만 이 정도로 아주 살짝 덮고 있으리라는 예상은 할 수 없었다. 속도가 아주 느릴 때에는 사실상 같다고 봐야 할 정도이다. 이것은 자연은 결코 완전히 수학적이지는 않지만 가능한 한 수학적임을 단적으로 보여주는 예라고 생각된다.

이 결과에 따르면, 앞서 소개한 중성자 별 쌍성계 PSR B1913+16의 중력파 방출률 계산에 사용된 수식인 일반상대론에 의한 중력파 복사의 에너지 방출률은 $\frac{64G^4m^5}{5c^9r^5}$ 로서 맥스웰 중력에 기반한 양보다 지나치게 작기 때문에 지체된 퍼텐셜의 개념에 따라 계산된 저항력에 의한 손실을 가릴 수가 없다. 따라서 라플라스 문제를 해결할 수 없으며 이는 일반상대론이 옳을 수가 없다는 중요한 증거 중 하나이다. 지체된 퍼텐셜 개념으로부터 유도한 이 책의 방식과는 전혀 다르면서도 특수상대론을 만족 시키는 다른 어떤 라플라스 문제 해결 방식이 가능할 것 인가를 생각해 보자면, 짐작도 가지 않거니와 자연이 힘마다 별도로 다른 번잡한 수학을 준비해야만 할 아무런 이유를 생각할 수 없다. 힘은 시공간의 본성으로부터 그 작동 방식이 기인해야 마땅하고 따라서 비슷한 문제에 대해서는 다른 종류의 힘이라도 비슷한 수학적 방식을 공유함이 마땅하다.

실록 힘마다 다른 수학이 존재하여 일반상대론은 다른 수학적 방식으로 작은 중력파 복사율을 가릴 수 있는 작은 힘의 저항 성분을 가진다는 억지 가정을 한다고 해도, 그것은 '쌍성계에서의 힘의 방향' 그림에서의 ϕ 각과 θ 각의 차이가 전자기력에 비해 살짝 작아져서, 중력의 방향이 보다 At를 정확하게 향하게 된다는 것이며, 그것은 결국 가속하는 전하와 질량을 가진 물체는 정전기력에 의하여 측정 되는 위치와 중력에 의하여 측정 되는 위치가 다르게 된다는 황당한 결론에 다다르게 된다. 그런 황당한 현상이 있을 이유가 없다. 결국 일반상대론이 옳기 위해서는 최소한 두 단계 이상의 상상을 초월하는 불필요한 복잡함이 필요하다. 나는 자연에 그런 불필요함이 준비되어 있으리라고 생각하지 않는다. 나는 일반상대론은

지체된 퍼텐셜 개념과 맞지 않으며 둘 중 하나는 틀렸는데 지체된 퍼텐셜 이론이 틀렸을 가능성은 없으므로 일반상대론이 틀렸다고 본다.

반대로 중력파 방출률이 지나치게 크지 않은가 하는 의문 정도는 가능하다. 방출률이 커진다면 왜 중력파 검출이 그토록 어려운지가 문제가 될 수 있다. 사실 나도 그 원인은 잘 모르겠다. 중력파 검출 실험을 직접 고안 혹은 시도해보거나 남이 한 실험을 철저히 검토해보지 않았기 때문이다. 하지만 중력파 검출을 어렵게 하는 몇 가지 기본적인 요인은 제시할 수 있다.

우선은 익히 알려진 것처럼 중력파는 모든 물질에 동일하게 작용하기 때문에 단일 위치에서는 검출이 불가능하고 중력파 측정을 위해서는 그 파장에 걸맞는 거대한 구조를 이용하여 거리에 따라 미세하게 달라지는 가속도의 변동을 측정해야 하는 것에 더하여 전자기파 보다 10의 $-30\sim-40$ 승 만큼 작은 신호일 중력파를 측정하는 것은 쉽지가 않다는 기본적인 사실이다.

두 번째로는 우주적 현상에서 검출 대상이 될만한 중력파원으로 중성자 별 충돌 같은 사건을 생각해 본다면, 태양 질량 부근에서 슈바르츠실트 반경과 중성자 별의 반경은 십 수 배 정도의 차이에 불과하므로 그 규모에서는 일반상대론 기반 중력파나 맥스웰 중력 기반 중력파나 수십 배 정도밖에 강도에서 차이가 나지 않는다는 점이다. 그 정도로는 맥스웰 중력 기반 중력파가 뚜렷이 검출이 쉬워진다고 하기 어렵다.

세 번째로는 우주는 중력에 대하여 중성이 아닌 단일 극성을 띠는 물질로 이루어져 있기 때문에 중력파에 대하여 투명하지 않다는 점이다. 모든 별이나 행성, 그리고 성간 물질들은 중력파를 흡수 산란할 것이므로 중력파 신호는 그 원천에서 약간만 떨어져도 금방 잡음화 되어 중력파의 증거로 판단하기 어려워질 것이다.

이런 것들을 고려해보면 중력파 검출은 오히려 일반상대론 기반 이론보다도 더 어려울 것으로 나는 추정하고 있으나 정확한 것은 차후 연구로 밝혀져야 할 일로 미루고자 한다.

지금 내가 제안하고 있는 장의 유한한 전달 속도에 따라 발생하는 저항에 의한 궤도 에너지 손실이 그보다 큰 다른 항인 파동 복사라는 요인에 의하여 가려진다는 생각은 수학적인 생각이라고 할 수는 없다. 그것은 그저 현실적인 실질적인 물리적인 'physical' 한 생각이다. 그리고, 계산 결과는 그것을 입증하기에 충분할 정도로 묘한, 살짝 어긋나지만 현실적인 일치를

보이고 있다. 이러한 종류의 생각은 물리학에서 사실 처음 등장한 것은 아니다. 바로 양자론이 비슷한 사고방식의 산물이라 본다. 고전 물리학의 개념을 수학적으로 확장하는 것 만으로는 양자론은 결코 나올 수 없는 이론이다. 고전 이론과 수학의 한계를 현실적인 생각으로 보완한 이론이라는 선례는 이미 있다고 본다.

그리고 물론 이 묘한 일치와 미세한 차이는 본질적으로는 수학의 불완전함을 말해주는 것이겠지만 어쩌면 물리 이론의 불완전함을 말하는 것일지도 모른다. 혹시 저 미세한 간극을 조금 더 메우는 이론도 존재 가능할지도 모른다. 하지만 그래도 여전히 또 다시 더 미세한 간극은 남을 것이고 결국 완전히 메꿔지지는 않을 것이다.

동일 질량의 원 궤도 쌍성계의 경우는 지체된 퍼텐셜 이론에 의한 장의 저항 성분이 생각할 수 있는 가장 큰 경우이고 다른 경우에는 파동 복사에 의한 손실과 장의 저항 항과의 차이가 좀 더 클 것이다. 지구와 태양 정도의 질량 차이에서는 사실상 라플라스 문제의 효과는 너무 미미하여 라플라스가 직접 다루기를 포기하고 대신 달의 궤도를 다루도록 했을 정도이다. 그러나, 지구 역시 가속 운동을 하고 있고 그에 따른 중력파를 발산하고 있을 것이다. 그것을 계산하고 감상 해보면서 라플라스 문제를 마무리하려 한다.

지구 역시 원 궤도에 가까우므로 원 궤도에서의 일정한 가속도를 가정하고 라모 공식을 사용해도 될 것이다. 그리고, ϵ 대신 η 을 사용해야 할 것이다. 또한 출력은 항상 양수이므로 부호도 바꾸어 주어야 할 것이다. 그러면 공식은

$$\frac{-a^2 m^2 \gamma^4}{6c^3 \pi \eta} = \frac{a^2 m^2 \gamma^4}{6c^3 \pi \frac{1}{4\pi G}} = \frac{2a^2 m^2 G \gamma^4}{3c^3} = \frac{2v^4 m^2 G}{3c^3 r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

이고,

광속 $c = 299792458m/s$, 중력 상수 $G = 6.67430e-11m^3Kg^{-1}s^{-2}$, 지구의 평균 공전 속도 $29780m/s$, 지구의 평균 궤도 반지름 $149597870700m$, 지구의 질량 $5.9736e24Kg$ 을 대입하면,

(77) - > PL := [c=299792458, G=6.67430e-11, v=29780, r=149597870700, m=5.9736e24]
 [c = 2_99792458.0, G = 0.66743E - 10, v = 29780.0, r = 1495_97870700.0,
 m = 5973600_0000000000_00000000.0]
 Type: List(Equation(Polynomial(Float)))

(78) -> eval $\left(\frac{2v^4 m^2 G}{3c^3 r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}, PL \right)$
 2070964195.8712177347_5882254230_8379199191_3710703980_8297222483
 Type: Fraction(Polynomial(Float))

약 2 기가와트라는 큰 출력을 보이고 있다. 그러나 지구라는 규모로 보면 서울시라는 일개 대도시의 전력 소모보다도 훨씬 작다.

(79) -> Te := eval $\left(\frac{1}{2}mv^2, [m = 5.9736e24, v=29780] \right)$
 2648_8388011200_0000000000_0000000000.0
 Type: Polynomial(Float)

(80) -> Te / 2070964195.87 / 60 / 60 / 24 / 365 / 1.0 e 12
 40557.9814221530_4209212684_7023449879_1656668045_4927328379_01691
 Type: Polynomial(Float)

이 방출률로 지구가 운동 에너지를 모두 잃는데 걸리는 시간은 약 4 경 년 정도가 걸린다. 그러니 지구가 중력파 방출로 인한 궤도 에너지 손실 때문에 태양으로 떨어질 걱정은 하지 않아도 된다. 실제로는 훨씬 더 큰 궤도 에너지를 잃는 요인과 얻는 요인이 존재할 뿐더러, 궤도 에너지 손실 여부와 관계없이 수 경 년에 비하면 순간에 지나지 않는 수 십억 년 후에는 태양이 적색 거성이 되어 반경이 지구 궤도 보다 커져서는 지구를 삼킬 것이라 한다.

5.7 요약

맥스웰중력 이론에 덧붙여 로렌츠 힘에 대한 약간의 수정을 가하는 것으로서 여러가지 문제를 해결할 수 있음을 확인한 김에 우주의 구조, 우주의 입자 밀도 함수와 더불어 나의 오랜 궁금중의 대상 이었던 광속으로 전달되는 힘에 의한 궤도 안정의 문제인 라플라스 문제가 맥스웰 중력으로 해결되는 지를 확인해 보았다.

이 과정에서 움직이는 점 전하에 의한 장에 대한 헤비사이드-파인만 공식,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{e_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} e_{r'} \right]$$

과 그리피스의 움직이는 점 전하에 의한 장의 공식,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^3} ((c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{r} \times (\vec{u} \times \vec{a}))$$

들이 모두

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right)^3} \left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \frac{\vec{r}}{r} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \frac{\vec{v}}{c} - \left(1 + \frac{\dot{r}}{c}\right) \frac{r\vec{a}}{c^2} \right)$$

꼴로 알아보기 쉽게 변환될 수 있는 동일한 공식들임을 확인 하였고, 또한 이 공식들은 모두 퍼셀의 등속 운동하는 점 전하에 의한 상대론적인 전기장 공식

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_p^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}_p$$

과도 동일함을 확인 하였다.

이를 바탕으로 유한한 광속으로 전달되는 힘이 에너지를 보존하는 궤도 운동을 유지 시킬 수 있는 조건을 만족 시킬만한 해법으로서, 쌍성계의 경우 한쪽의 움직이는 원천에 의한 장이 반대편 별에 작용하는 방향이 원천 별의 현재 위치 보다 약간 미래, 힘의 작용을 받는 측에서 볼 때에는 약간 저항력을 느끼는 방향이되, 그 저항력으로 인한 에너지 손실의 크기가 중력파 방출로 인한 에너지 손실보다 작다면 힘이 저항력으로 작용하여 생기는 효과는 중력파 방출로 인한 효과에 가리워지고 통합됨으로써 라플라스 문제가 해결될 수 있을 것이라는 추측을 하였다. 저항력이 없는 경우, 등속 운동의 경우처럼 힘이 정확히 반대편 별을 향하는 경우는 추측 단계에서 이미 배제되었다. 쌍성계의 운동에서 반대편 별의 위치를 결정하는 함수에는 초월 함수인 삼각함수가 포함되므로 이는 장의 방향을 결정하는 대수함수로 정확하게 표현될 수 없음이 애초부터 명백했기 때문이다. 이 추측을 구체적인 계산을 통해 확인하여 보았다.

그 결과는 방향에 대한 추측과, 파동의 복사에 의한 손실의 크기가 저항에 의한 손실보다 클 것이라는 추측에 대해서는 예상대로의 결과였으나 그 크기 자체에 대해서는 상당히 놀랍게도 동일 질량이고 원 궤도를 도는 쌍성계의 경우 그 궤도 속도가 느려질수록 파동 복사로 인한 손실과 장의 유한한 속도에 의한 저항력으로 인한 손실이 수렴해가는 것을 확인하였다. 이는 맥스웰 중력에 의한 경우보다 중력파 방출 에너지가 작은 일반상대론은 지체된 퍼텐셜 이론과 양립할 수 없다는 사실을 뜻하는 것으로 미처 예상하지 못한 일반상대론에 대한 추가 반박 증거이다. 물론 동일 질량 원

궤도 쌍성계는 중력파 방출은 가장 작고 힘의 편향에 의한 저항력은 가장 큰 경우이고, 질량 차가 날수록, 궤도가 원을 벗어날수록, 중력파 방출과 힘의 편향에 의한 저항력 손실의 차는 커지게 될 것이다. 그러나 올바른 이론이라면 가장 최악의 경우에도 파탄이 나지 않아야 하는데, 맥스웰 중력은 그 한계에 점진적으로 일치해 버리는 것이었고, 일반상대론은 그 한계가 맞지 않는, 파탄이 나버리는 경우이니, 이는 이 책에서 다른 여러가지 일반상대론에 대한 반박 증거 중 가장 확정적인 증거로 보인다.

이러한 과정에서 파인만 공식의 유도 과정에 담긴 수학과 물리학의 관계에 대한 재미있는 단서를 살펴 보았고, 그 준비 과정에서 리에나르-비헤르트 퍼텐셜과 라모의 공식에 대한, 나의 생각으로는, 아직도 전자기학 교과서들에 실려있는 상대성 이론보다도 오래된 구닥다리 설명들 보다는 좀 더 깔끔하고 현대적이라 생각하는 설명들도 해보았다.

움직이는 점 전하에 의한 자기장에 대한 식

$$\vec{B} = \frac{\hat{r}}{c} \times \vec{E}$$

의 유도는 행성의 움직임과 그 에너지 보존을 다루는 라플라스 문제와는 직접 관련은 없었지만 파인만 공식의 유도 과정에서 발견한 물리학에 적용되는 수학의 한계와 관련된 문제가 아닐까 예상되는 기묘한 사실을 다루기 위하여 덤으로 해보았다.

힘을 수식화하여 묘사하는 과정의 가장 밑바닥에 파인만이 놓쳤거나 혹은 공개하지 않고 지나가 버린 수학적인 불완전성이 자리 잡고 있었다는 발견은 여러모로 의미심장한 경험이었고 물리학과 수학과의 관계에 대하여 여러모로 생각할 거리를 주는 사실이라고 생각한다.

이 부분은 앞으로의 물리학 이론을 발견해 나가는 과정에서 이래저래 다시 되새겨볼 필요가 있을만한 중요한 부분으로 생각된다.